ALGEBRA 1 — 2008/2009

Prof. Fabio Gavarini

Sessione estiva anticipata — prova scritta del 23 Febbraio 2009

. . . .

N.B.: compilare il compito in modo sintetico ma esauriente*, spiegando chiaramente quanto si fa, e scrivendo in corsivo con grafia leggibile.*

. . . . $*$ . . . .

[1] — Sia $\big(U(\mathbb{Z}_{40})\,;\,\cdot\,\big)$ il gruppo degli elementi invertibili dell'anello unitario $\big(\mathbb{Z}_{40}\,;\,+\,,\,\cdot\,\big)$.

(a) Calcolare esplicitamente il sottoinsieme $\big(U(\mathbb{Z}_{40})\,;\,\cdot\,\big)$;

(b) determinare se esistano in $\big(U(\mathbb{Z}_{40})\,;\,\cdot\,\big)$ elementi di ordine 2, 3, 4, 5 oppure 6;

(c) stabilire — giustificando la conclusione — se il gruppo $\big(U(\mathbb{Z}_{40})\,;\,\cdot\,\big)$ sia ciclico oppure no.

[2] — Siano A e B due insiemi non vuoti, sia B^A l'insieme di tutte le applicazioni da A a B , e sia $\mathcal{S}(B)$ il gruppo simmetrico di tutte le permutazioni di B . Si consideri in B^A la relazione ρ definita da

$$f \,\rho\, f' \quad \Longleftrightarrow \quad \exists\; \sigma \in \mathcal{S}(B) \,:\, \sigma \circ f = f'$$

dove il simbolo $\circ$ denota il prodotto di composizione.

(a) Dimostrare che ρ è una relazione di equivalenza.

(b) Per ogni $f \in B^A$, dimostrare che $St_f := \big\{\, \sigma \in \mathcal{S}(B) \;\big|\; \sigma \circ f = f \,\big\}$ è un sottogruppo di $\mathcal{S}(B)$.

(c) Per ogni $f \in B^A$, dimostrare che per la classe di ρ–equivalenza di f vale l'inclusione $[f]_\rho \subseteq \left\{ f' \in B^A \,\middle|\, Im(f) \sim Im\big(f'\big) \right\}$, dove il simbolo $\sim$ significa "è equipotente a".

[3] — Sia $\mathbb{K}$ un campo, sia $\mathbb{K}^* := \mathbb{K} \setminus \{0\}$, e siano

$$T_2(\mathbb{K}) := \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & c \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \,\middle|\, \alpha, \beta \in \mathbb{K}^*, \, c \in \mathbb{K} \right\}$$

$$U_2(\mathbb{K}) := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, c \in \mathbb{K} \right\}, \qquad D_2(\mathbb{K}) := \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \,\middle|\, \alpha, \beta \in \mathbb{K}^* \right\}$$

sottoinsiemi dell'insieme delle matrici 2×2 a coefficienti in $\mathbb{K}$.

(a) Dimostrare che $T_2(\mathbb{K})$ è un sottogruppo del gruppo $GL_2(\mathbb{K})$ (rispetto al prodotto righe per colonne).

(b) Dimostrare che $D_2(\mathbb{K})$ è un sottogruppo di $T_2(\mathbb{K})$.

(c) Dimostrare che $U_2(\mathbb{K})$ è un sottogruppo normale di $T_2(\mathbb{K})$.

(d) Determinare esplicitamente un isomorfismo (di gruppi) dal gruppo quoziente $T_2(\mathbb{K}) \big/ U_2(\mathbb{K})$ al gruppo $D_2(\mathbb{K})$.

[4] — Nell'anello di polinomi $\mathbb{K}[x]$, dove $\mathbb{K}$ è un campo, si considerino i due polinomi $f(x) := x^4 - 1$, $g(x) := x^4 - 3\,x^3 + 3\,x - 1$.

Calcolare il m.c.m. tra $f(x)$ e $g(x)$, nei due casi

(a) $\mathbb{K} := \mathbb{Q}$, *(b)* $\mathbb{K} := \mathbb{Z}_5$.