ALGEBRA 1 — 2008/2009

prof. Fabio Gavarini

Sessione estiva — prova scritta del 21 Settembre 2009

. . . .

N.B.: compilare il compito in modo sintetico ma esauriente, *spiegando chiaramente quanto si fa, e scrivendo in* corsivo *con grafia leggibile.*

. . . . $*$ . . . .

[1] — Sia $\sim$ la relazione in $\mathbb{C}$ definita così: $z \sim w \iff z^3 = w^3$.

(a) Dimostrare che $\sim$ è una relazione di equivalenza in $\mathbb{C}$;

(b) calcolare esplicitamente la classe di equivalenza di 0 e la classe di equivalenza di 1 ;

(c) la proiezione canonica $\pi : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}/\!\sim$ è iniettiva? È suriettiva? È biunivoca?

[2] — Si consideri l'insieme $\mathbb{Z}_2[\ell] := \big\{\, a + b\,\ell \,\big|\, a\,, b \in \mathbb{Z}_2 \,\big\}$, dove ciascun elemento $a + b\,\ell$ può essere inteso come un'espressione formale. Consideriamo in $\mathbb{Z}_2[\ell]$ le due operazioni

$$(a_1 + b_1\,\ell\,) \oplus (a_2 + b_2\,\ell\,) := (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\,\ell$$
$$(a_1 + b_1\,\ell\,) \circledast (a_2 + b_2\,\ell\,) := (a_1\,a_2 + b_1\,b_2) + (a_1\,b_2 + b_1\,a_2 + b_1\,b_2)\,\ell$$

(a) Dimostrare che $\big(\mathbb{Z}_2[\ell]\,;\oplus\,,\circledast\big)$ è un anello, e dire se sia unitario, se sia commutativo, se sia un dominio di integrità, se sia un campo.

(b) Si consideri l'elemento $(1+\ell) = (1 + 1\,\ell\,) \in \mathbb{Z}_2[\ell]$. Tale elemento è invertibile in $\mathbb{Z}_2[\ell]$? In caso affermativo, determinarne l'inverso. Tale

elemento è un divisore dello zero? In caso affermativo, trovare un secondo elemento $(x + y\,\ell\,) \in \mathbb{Z}_2[\ell]$ diverso dallo zero — di $\mathbb{Z}_2[\ell]$ — tale che $(1+\ell) \circledast (x + y\,\ell\,)$ oppure $(x + y\,\ell\,) \circledast (1+\ell)$ sia lo zero — di $\mathbb{Z}_2[\ell]$.

Suggerimento: calcolare ℓ^2, cioè trovare $a, b \in \mathbb{Z}_2$ tali che $\ell^2 = a + b\,\ell$.

[3] — Sia $\big(U(\mathbb{Z}_{30})\,;\cdot\big)$ il gruppo degli elementi invertibili dell'anello unitario $\big(\mathbb{Z}_{30}\,;+,\cdot\big)$.

Dimostrare che $\big(U(\mathbb{Z}_{30})\,;\cdot\big)$ non è isomorfo al gruppo $\big(\mathbb{Z}_8\,;+\big)$.

[4] — Si considerino i due polinomi $f(x) := x^6 - 1$ e $g(x) := x^{15} - 1$ in $\mathbb{K}[x]$, dove $\mathbb{K}$ è alternativamente il campo $\mathbb{K} := \mathbb{Q}$ oppure $\mathbb{K} := \mathbb{Z}_3$ (si considerino *entrambi* i casi).

(a) Calcolare il M.C.D. tra $f(x)$ e $g(x)$;

(b) calcolare una identità di Bézout per $M.C.D.\big(f(x), g(x)\big)$.