PROVA SCRITTA DI ALGEBRA 1

19 Settembre 2005

— svolgimento —

1. Si fattorizzi in polinomi irriducibili rispettivamente su $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$, il polinomio

$$f(x) \;=\; x^5 + 3\,x^4 - x^3 - 3\,x^2 - 2\,x - 6$$

Soluzione: Le eventuali radici intere di $f(x)$ appartengono necessariamente a $\{1, -1, 2, -2, 3, -3\}$. Il calcolo diretto dà

$$f(1) \neq 0\,,\; f(-1) \neq 0\,,\; f(2) \neq 0\,,\; f(-2) \neq 0\,,\; f(3) \neq 0\,,\; f(-3) = 0$$

perciò -3 è l'unica radice di $f(x)$ in $\mathbb{Z}$. Allora $(x+3)$ divide $f(x)$ in $\mathbb{Z}[x]$; la divisione euclidea dà

$$f(x) \;=\; (x+3)\cdot\big(x^4 - x^2 - 2\big) \quad . \tag{1}$$

Il polinomio $\big(x^4 - x^2 - 2\big)$ ha quattro radici complesse, precisamente $\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$, $\sqrt{-1} =: i$, e $-\sqrt{-1} = -i$. Nessuna di esse è razionale, quindi $f(x)$ non ha altri fattori lineari su $\mathbb{Q}$ oltre al fattore $(x+3)$. D'altra parte, moltiplicando $\big(x-\sqrt{2}\,\big)\cdot\big(x+\sqrt{2}\,\big)$ e $(x-i)\cdot(x+i)$ si ottiene la fattorizzazione in irriducibili su $\mathbb{Q}$

$$f(x) \;=\; (x+3)\cdot\big(x^2-2\big)\cdot\big(x^2+1\big) \quad .$$

Poiché $\pm\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ e $\pm i \notin \mathbb{R}$, l'analoga fattorizzazione su $\mathbb{R}$ è

$$f(x) \;=\; (x+3)\cdot\big(x-\sqrt{2}\,\big)\cdot\big(x+\sqrt{2}\,\big)\cdot\big(x^2+1\big) \quad .$$

Infine, quella su $\mathbb{C}$ è

$$f(x) \;=\; (x+3)\cdot\big(x-\sqrt{2}\,\big)\cdot\big(x+\sqrt{2}\,\big)\cdot(x-i)\cdot(x+i) \quad . \quad \square$$

2. Si considerino le seguenti applicazioni dell'anello $\mathbb{Z}$ in sé:

$$f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}\,, \quad f(z) := |z| \qquad \forall\, z \in \mathbb{Z}$$
$$g : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}\,, \quad g(z) := z+1 \qquad \forall\, z \in \mathbb{Z}$$

Si dica se si tratta di applicazioni suriettive e/o iniettive.

Si dica inoltre se si tratta di omomorfismi di anelli e, in caso positivo, se ne determini il nucleo.

Soluzione: L'applicazione f non è iniettiva, perché, ad esempio, per ogni $n \in \mathbb{Z}$ con $n > 0$ si ha $n \neq -n$ ma $f(n) = f(-n)$. Inoltre, la f non è suriettiva, perché ha immagine

$Im(f) = \mathbb{Z}_+$ (= interi positivi) che è un sottoinsieme *proprio* del codominio di f, che invece è $\mathbb{Z}$.

L'applicazione g è iniettiva. Infatti, dati $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}$ con $g(z_1) = g(z_2)$ si ha $z_1 + 1 = z_2 + 1$ e quindi $z_1 = z_2 f$. Inoltre, la g è suriettiva. Infatti, per ogni $z \in \mathbb{Z}$ esiste $\zeta \in \mathbb{Z}$ tale che $g(\zeta) = z$; precisamente, è $\zeta = z - 1$. $\square$

3. Sia $\mathfrak{G}$ il gruppo di tutte le applicazioni della retta reale $\mathbb{R}$ in sé della forma

$$\varphi_{a,b} : x \mapsto b \qquad \forall\, x \in \mathbb{R} \qquad\qquad \big(a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\,,\, b \in \mathbb{R}\big)$$

(a) Si dimostri che l'applicazione

$$\Psi : \mathfrak{G} \longrightarrow \mathfrak{G}\,, \qquad \varphi_{a,b} \mapsto \varphi_{a,0} \qquad\qquad \forall\, a, b \in \mathbb{R}\,,\, a \neq 0$$

è un omomorfismo del gruppo $\mathfrak{G}$ in sé.

(b) Si determinino il nucleo e l'immagine di Ψ.

(c) Si descriva esplicitamente l'isomorfismo

$$\Psi_* : \mathfrak{G} \Big/ Ker(\Psi) \xrightarrow{\ \cong\ } Im(\Psi)$$

dato dal Teorema Fondamentale di Omomorfismo.

Soluzione: (a) Per definizione si ha $(\forall\, a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\,,\; a, \alpha \neq 0\,,\; \forall\, x \in \mathbb{R})$

$$\big(\varphi_{a,b} \circ \varphi_{\alpha,\beta}\big)(x) \;=\; \varphi_{a,b}\big(\varphi_{\alpha,\beta}(x)\big) \;=\; \varphi_{a,b}(\alpha\, x + \beta) \;=\; a\,\alpha + (a\,\beta + b)$$

che significa che il prodotto nel gruppo $\mathfrak{G}$ è descritto da

$$\varphi_{a,b} \circ \varphi_{\alpha,\beta} \;=\; \varphi_{a\,\alpha, a\,\beta + b} \qquad \big(\forall\, a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\big) \quad . \tag{2}$$

Applicando Ψ ad un prodotto, la (2) ci dà

$$\Psi\big(\varphi_{a,b} \circ \varphi_{\alpha,\beta}\big) \;=\; \Psi\big(\varphi_{a\,\alpha, a\,\beta + b}\big) \;:=\; \varphi_{a\,\alpha, 0} \quad . \tag{3}$$

D'altra parte, ancora per la (2) si ha anche

$$\Psi\big(\varphi_{a,b}\big) \circ \Psi\big(\varphi_{\alpha,\beta}\big) \;:=\; \varphi_{a,0} \circ \varphi_{\alpha,0} \;=\; \varphi_{a\,\alpha, 0} \quad . \tag{4}$$

Confrontando (3) e (4) si trova $\Psi\big(\varphi_{a,b} \circ \varphi_{\alpha,\beta}\big) = \Psi\big(\varphi_{a,b}\big) \circ \Psi\big(\varphi_{\alpha,\beta}\big)$ per ogni $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $a, \alpha \neq 0$, che significa che Ψ è un omomorfismo, q.e.d.

(b) Per definizione, Ψ ha nucleo $Ker(\Psi) := \big\{\, \varphi_{a,b} \in \mathfrak{G} \,\big|\, \Psi(\varphi_{a,b}) = e_{\mathfrak{G}} \,\big\}$, dove $e_{\mathfrak{G}}$ è l'identità del gruppo $\mathfrak{G}$: e quest'ultima, è l'applicazione $e_{\mathfrak{G}} = id_{\mathbb{R}} = \varphi_{1,0}$. Poiché $\Psi(\varphi_{a,b}) := \varphi_{a,0}$, e $\varphi_{a,0} = \varphi_{1,0}$ se e soltanto se $a = 1$, si conclude che

$$Ker(\Psi) \;=\; \big\{\, \varphi_{a,b} \in \mathfrak{G} \,\big|\, a = 1 \,\big\} \;=\; \big\{\, \varphi_{1,b} \in \mathfrak{G} \,\big|\, b \in \mathbb{R} \,\big\} \quad .$$

Ancora, $\varPsi$ ha immagine $\mathit{Im}\big(\varPsi\big) := \big\{ \varphi_{\alpha,\beta} \in \mathfrak{G} \,\big|\, \exists\, \varphi_{a,b} \in \mathfrak{G} : \varPsi(\varphi_{a,b}) = \varphi_{\alpha,\beta} \big\}$, e chiaramente dalla definizione di $\varPsi$ segue subito che

$$\mathit{Im}\big(\varPsi\big) = \big\{ \varphi_{\alpha,\beta} \in \mathfrak{G} \,\big|\, \beta = 0 \big\} = \big\{ \varphi_{\alpha,0} \in \mathfrak{G} \big\} \quad .$$

(c) Il gruppo quoziente $\mathfrak{G} \big/ \mathit{Ker}(\varPsi)$ è dato da

$$\mathfrak{G} \big/ \mathit{Ker}(\varPsi) = \big\{ [\varphi_{a,b}]_{b \in \mathbb{R}} \,\big|\, a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \big\}$$

dove ciascuna classe laterale, univocamente determinata da un $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, è data

$$[\varphi_{a,b}]_{b \in \mathbb{R}} := \big\{ \varphi_{a,b} \,\big|\, b \in \mathbb{R} \big\}$$

Nel Teorema Fondamentale di Omomorfismo, l'isomorfismo considerato manda una classe laterale (modulo il nucleo) nell'immagine di un suo qualunque rappresentante: nel nostro caso,

$$\varPsi_*\big([\varphi_{a,b}]_{b \in \mathbb{R}} \big) = \varPsi(\varphi_{a,b}) = \varphi_{a,0} \quad . \quad \square$$