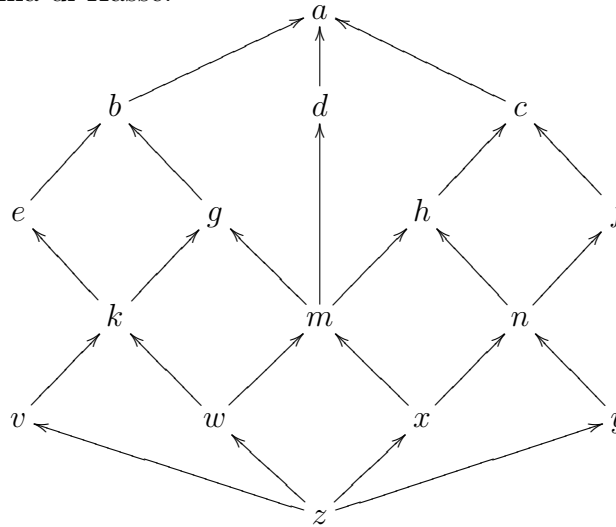


corso di “Algebra e Logica” (prof. Fabio Gavarini)

Tutorato su RETICOLI E ALGEBRE DI BOOLE

..... *

[1] Si consideri il reticolo $L := \{a, b, c, d, e, f, g, h, k, m, n, v, w, x, y, z\}$ descritto dal seguente diagramma di Hasse:



- (a) Determinare tutti gli atomi del reticolo $(L; \preceq)$.
- (b) Determinare tutti gli elementi $\vee$ -irriducibili del reticolo $(L; \preceq)$.
- (c) Per ciascuno dei due elementi a, c e g in L , determinare se esista una $\vee$ -fattorizzazione non ridondante in fattori $\vee$ -irriducibili per tale elemento. Nel caso in cui una tale $\vee$ -fattorizzazione non esista, se ne spieghi il perché; nel caso in cui ne esista almeno una, si determinino *tutte* (a meno dell'ordine dei fattori) le $\vee$ -fattorizzazioni di tal genere.
- (d) Trovare un sottoreticolo L' del reticolo $(L; \preceq)$ tale che L' abbia esattamente sei elementi e sia distributivo.
- (e) Stabilire se il reticolo $(L; \preceq)$ sia un'algebra di Boole oppure no.
- (f) Stabilire se il reticolo $(L; \preceq)$ sia distributivo oppure no.

[2] Dato l'insieme $\{\mathbb{E}, \mathbb{L}, \mathbb{Y}, \mathbb{S}\}$, si consideri il corrispondente insieme delle parti $\mathcal{P}(\{\mathbb{E}, \mathbb{L}, \mathbb{Y}, \mathbb{S}\})$, dotato della relazione (d'ordine) di inclusione; *per semplificare la notazione indicheremo un sottoinsieme $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ con $\underline{x_1 x_2 \dots x_n} := \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$* . Si consideri poi in $\mathcal{P}(\{\mathbb{E}, \mathbb{L}, \mathbb{Y}, \mathbb{S}\})$ il sottoinsieme

$$\mathbb{E} := \{ \emptyset, \mathbb{E}, \mathbb{L}, \mathbb{Y}, \mathbb{S}, \underline{\mathbb{L}\mathbb{Y}}, \underline{\mathbb{E}\mathbb{L}\mathbb{Y}}, \underline{\mathbb{E}\mathbb{L}\mathbb{S}}, \underline{\mathbb{E}\mathbb{Y}\mathbb{S}}, \underline{\mathbb{E}\mathbb{L}\mathbb{Y}\mathbb{S}} \}$$

e i suoi sottoinsiemi

$$\mathbb{E}' := \mathbb{E} \setminus \{ \underline{\mathbb{L}} \underline{\mathbb{Y}} \} \quad , \quad \mathbb{E}'' := \mathbb{E} \setminus \{ \underline{\mathbb{E}} \underline{\mathbb{L}} \underline{\mathbb{Y}} \}$$

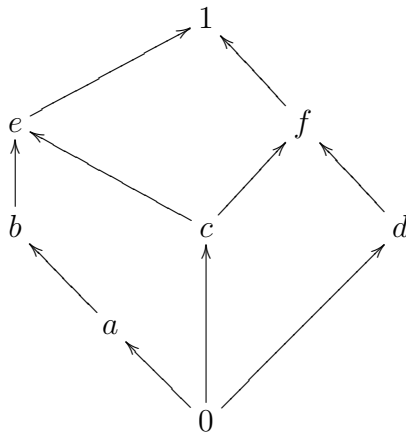
In tali (sotto)insiemi $\mathbb{E}$, $\mathbb{E}'$ e $\mathbb{E}''$ consideriamo ancora la relazione (d'ordine) di inclusione.

- (a) Disegnare il diagramma di Hasse dell'insieme ordinato $(\mathbb{E}; \subseteq)$.
- (b) Verificare se l'insieme ordinato $(\mathbb{E}; \subseteq)$ sia un reticolo oppure no. In caso negativo, si spieghi perché tale insieme ordinato non sia un reticolo; in caso affermativo, si determini (giustificando la risposta) se tale reticolo sia distributivo.
- (c) Verificare se l'insieme ordinato $(\mathbb{E}'; \subseteq)$ sia un reticolo oppure no. In caso negativo, si spieghi perché tale insieme ordinato non sia un reticolo; in caso affermativo, si determini (giustificando la risposta) se tale reticolo sia un'algebra di Boole.
- (d) Verificare se l'insieme ordinato $(\mathbb{E}''; \subseteq)$ sia un reticolo oppure no. In caso negativo, si spieghi perché tale insieme ordinato non sia un reticolo; in caso affermativo, si determini (giustificando la risposta) se tale reticolo sia un'algebra di Boole.

[3] Dato l'insieme $L := \{1, 2, 3, 6, 7, 12, 56, 168\}$, si consideri in esso la relazione di divisibilità δ , rispetto alla quale $(L; \delta)$ è un insieme ordinato.

- (a) Verificare che l'insieme ordinato $(L; \delta)$ è un reticolo, scrivendo esplicitamente tutti i valori $\sup(x, y)$ e $\inf(x, y)$ per ogni $x, y \in L$ (tranne i casi banali).
- (b) Determinare tutti gli atomi del reticolo $(L; \delta)$.
- (c) Determinare tutti gli elementi $\vee$ -irriducibili del reticolo $(L; \delta)$.
- (d) Per ciascuno dei due elementi 56 e 168 in L , determinare se esista una $\vee$ -fattorizzazione non ridondante in fattori $\vee$ -irriducibili per tale elemento. Nel caso in cui una tale $\vee$ -fattorizzazione non esista, se ne spieghi il perché; nel caso in cui ne esista almeno una, si determinino *tutte* (a meno dell'ordine dei fattori) le $\vee$ -fattorizzazioni di tal genere.
- (e) Stabilire, motivando adeguatamente la risposta, se il reticolo $(L; \delta)$ sia un'algebra di Boole oppure no.

[4] Si consideri il reticolo $L := \{0, a, b, c, d, e, f, 1\}$ descritto dal seguente diagramma di Hasse:



- (a) Determinare tutti gli atomi del reticolo L .
- (b) Determinare tutti gli elementi $\vee$ -irriducibili del reticolo L .
- (c) Determinare se esista una $\vee$ -fattorizzazione non ridondante in fattori $\vee$ -irriducibili per l'elemento 1. Nel caso in cui una tale $\vee$ -fattorizzazione non esista, se ne spieghi il perché; nel caso in cui esista, se ne determini esplicitamente almeno una, e — se fosse possibile — almeno due non equivalenti.
- (d) Determinare se il reticolo L sia un'algebra di Boole oppure no.
- (e) Determinare se il reticolo L sia complementato oppure no.
- (f) Determinare se il reticolo L sia distributivo oppure no.

[5] — Sia $n \in \mathbb{N}_+$ un numero naturale positivo, la cui fattorizzazione in numeri primi distinti sia $n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_k^{e_k}$ for some $k \in \mathbb{N}$ and $e_1, e_2, \dots, e_k \in \mathbb{N}_+$. Sia poi D_n il corrispondente reticolo dei divisori di n . Dimostrare che

$$D_n \text{ è un'algebra di Boole} \iff e_1 = 1, e_2 = 1, \dots, e_k = 1$$

[6] — Verificare che i reticoli (D_6, mcm, MCD) e (D_{15}, mcm, MCD) sono isomorfi, esibendo esplicitamente un isomorfismo di reticoli.

[7] — Verificare che i reticoli (D_6, mcm, MCD) e (D_8, mcm, MCD) non sono isomorfi.

[8] — Verificare che i reticoli (D_6, mcm, MCD) e $(\mathcal{P}(\{1, 2\}), \cup, \cap)$ sono isomorfi, esibendo esplicitamente un isomorfismo di reticoli.

[9] — Stabilire se il reticolo (D_{30}, mcm, MCD) dei divisori di 30 sia isomorfo al reticolo $(\mathcal{P}(\{1, 2, 3\}), \cup, \cap)$; in caso affermativo, stabilire quanti sono gli isomorfismi di reticoli $\varphi : \mathcal{P}(\{1, 2, 3\}) \longrightarrow D_{30}$.

[10] — Sia $\mathcal{P}_{cof}^f(\mathbb{N})$ l'insieme dei sottoinsiemi E di $\mathbb{N}$ che soddisfino una delle seguenti proprietà: la cardinalità di E è finita oppure la cardinalità di $\mathbb{N} \setminus E$ è finita.

Dimostrare che $(\mathcal{P}_{cof}^f(\mathbb{N}), \cup, \cap)$ è un'algebra di Boole.