

corso di “Algebra e Logica” (prof. Fabio Gavarini)

TUTORATO su PRINCIPIO DI INDUZIONE, SCRITTURA POSIZIONALE, CARDINALITÀ

..... *

1 — Siano $k, n \in \mathbb{N}$, e siano A e B due insiemi di cardinalità $|A| = k$ e $|B| = n$.

(a) Calcolare il numero di corrispondenze $A \dashrightarrow B$ da A a B .

(b) Calcolare il numero di funzioni $A \longrightarrow B$ da A a B .

(c) Calcolare il numero di iniezioni ($:=$ “funzioni iniettive”) $A \hookrightarrow B$ da A a B .

(d) Calcolare il numero di suriezioni ($:=$ “funzioni suriettive”) $A \twoheadrightarrow B$ da A a B .

(e) Calcolare il numero di biiezioni ($:=$ “funzioni biiettive”) $A \xleftrightarrow{\sim} B$ da A a B .

2 — Indicata con x una indeterminata, si dimostri che per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale l'identità tra polinomi $x^{n+1} - 1 = (x - 1)(x^n + x^{n-1} + \dots + x^2 + x + 1)$.

3 — Per un qualsiasi $k \in \mathbb{N}_+$ e un qualsiasi $b \in \mathbb{N}$ con $b \geq 2$, determinare *quanti* e *quali* siano i numeri che si possono scrivere con la notazione posizionale in base b usando da un minimo di una fino a un massimo di k cifre.

4 — Siano A e B due insiemi *finiti* equipotenti, dunque tali che $|A| = |B| \in \mathbb{N}$. Dimostrare che per ogni funzione $f : A \longrightarrow B$ si ha

$$f \text{ è iniettiva} \iff f \text{ è suriettiva}$$

5 — Per la scrittura posizionale in base $v :=$ “VENTICINQUE” si usino le venticinque cifre ordinate dell'insieme $\{0, 1, \dots, 9, A, B, \dots, H, I, J, K, L, M, N, P\}$, e per la scrittura in base $c =$ “CINQUE” si usino le cinque cifre ordinate dell'insieme $\{0, 1, 2, 3, 4\}$.

(a) Scrivere in base v il numero n che in base c è espresso dalla scrittura posizionale $n = (413203241023142)_c$.

(b) Scrivere in base c il numero m che in base v è espresso dalla scrittura posizionale $m = (7N36H18E)_v$.

Soluzione: $n = (48AHL2GM)_v$, $n = (1243031132011324)_c$.

6 — Scrivere la tabellina del 9 in base “DIECI”, la tabellina del 4 in base “CINQUE”, la tabellina del 7 in base “OTTO”, e la tabellina del $\wedge$ in base “DODICI” (usando le dodici cifre [ordinate] dell'insieme $\{0, 1, 2, 3, \dots, 8, 9, \perp, \wedge\}$).

7 — Scrivere la tabellina del 5 in base “DIECI”, la tabellina del 4 in base “OTTO”, la tabellina del 3 in base “NOVE”, la tabellina del 2 in base “SEI”, la tabellina del 6 in base “DODICI” — usando le dodici cifre (ordinate) dell’insieme $\{0, 1, 2, 3, \dots, 8, 9, \perp, \wedge\}$ — la tabellina del 4 in base “DODICI”, la tabellina del 3 in base “DODICI”.

8 — Dati due insiemi A e B , dimostrare che $|A \times B| = |B \times A|$.

9 — Dati due insiemi X e Y tali che $|X| = |Y|$, dimostrare che $|\mathcal{P}(X)| = |\mathcal{P}(Y)|$.

Suggerimento: A partire da una biiezione $f : X \xrightarrow{\sim} Y$, si costruisca una opportuna biiezione $f_{\mathcal{P}} : \mathcal{P}(X) \xrightarrow{\sim} \mathcal{P}(Y)$.

10 — Dati quattro insiemi A_1, A_2, B_1 e B_2 tali che $|A_1| = |A_2|$ e $|B_1| = |B_2|$, dimostrare che

$$|A_1 \amalg B_1| = |A_2 \amalg B_2|, \quad |A_1 \times B_1| = |A_2 \times B_2|, \quad |B_1^{A_1}| = |B_2^{A_2}|$$

Suggerimento: A partire da due biiezioni $h : A_1 \xrightarrow{\sim} A_2$ e $k : B_1 \xrightarrow{\sim} B_2$ assegnate, si costruiscano opportunamente delle biiezioni $(h \amalg k) : A_1 \amalg B_1 \xrightarrow{\sim} A_2 \amalg B_2$, $(h \times k) : A_1 \times B_1 \xrightarrow{\sim} A_2 \times B_2$ e $k^h : B_1^{A_1} \xrightarrow{\sim} B_2^{A_2}$.

11 — Dati tre insiemi A, B e C , dimostrare che

$$\begin{aligned} |(A \times B)^C| &= |A^C \times B^C|, & |A^B \amalg C| &= |A^B \times A^C| \\ |(A^B)^C| &= |A^{B \times C}| = |A^{C \times B}| = |(A^C)^B| \end{aligned}$$

12 — Dato un insieme B e $n \in \mathbb{N}$, e posto $B^n := B \times B \times \dots \times B$ (con n fattori, tutti uguali a B), dimostrare che

$$|B^{\{1,2,\dots,n\}}| = |B^n|$$

13 — Dato un insieme infinito E e un suo sottoinsieme F finito, dimostrare che

$$|E \setminus F| = |E|$$

Suggerimento: Si risolva prima il problema per $X = \mathbb{N}$, e poi si utilizzi la soluzione di tale caso per ottenerne una nel caso generale.

14 — Dato un insieme infinito X e un insieme finito K , dimostrare che

$$|X \amalg K| = |X|$$

Suggerimento: Si risolva prima il problema per $X = \mathbb{N}$, e poi si utilizzi la soluzione di tale caso per ricavarne una anche nel caso generale. In alternativa, si può “applicare a rovescio” l’**Esercizio 13** qui sopra.

15 — Dati due insiemi A e B , dimostrare che

$$|A \setminus B| = |B \setminus A| \implies |A| = |B|$$

Suggerimento: Si osservi un attimo come è fatto l'insieme $A \cup B$...

16 — Dati due insiemi A e B , dimostrare che

$$|B| \preceq |A| \iff \exists \text{ una funzione suriettiva } f : A \twoheadrightarrow B$$

