ESERCIZI SU

POLINOMI BOOLEANI

N.B.: il simbolo contrassegna gli esercizi (relativamente) più complessi.

— ∗ —

1 — Calcolare la forma normale disgiuntiva (= F.N.D.) e una forma minimale (= f.m.) del polinomio booleano in tre variabili $f(x,y,z) := (y \vee x \vee z \vee x) \wedge 1 \wedge \big(y' \vee 0 \vee z \vee x' \vee z\big)$.

<u>Soluzione</u>: $$\text{F.N.D.} = (x \wedge y \wedge z) \vee \big(x \wedge y' \wedge z\big) \vee \big(x \wedge y' \wedge z'\big) \vee$$
$$\vee \big(x' \wedge y \wedge z\big) \vee \big(x' \wedge y \wedge z'\big) \vee \big(x' \wedge y' \wedge z\big)$$
$$\text{f.m.} = \big(x' \wedge y\big) \vee \big(x \wedge y'\big) \vee z$$

2 — Calcolare la forma normale disgiuntiva (= F.N.D.) e una forma minimale (= f.m.) del polinomio booleano in tre variabili

$$h(x,y,z) := \big(y' \vee z' \vee 0 \vee x'\big) \wedge 1 \wedge \big(z \vee x' \vee 0 \vee y \vee z\big)' \wedge \big(z' \vee x \vee y \vee z'\big) \ .$$

<u>Soluzione</u>: $\text{F.N.D.} = x \wedge y' \wedge z' = \text{f.m.}$

3 — Calcolare la forma normale disgiuntiva (= F.N.D.) e una forma minimale (= f.m.) del polinomio booleano in tre variabili $\ell(x,y,z) := \big((x \wedge y)' \wedge \big(y \vee x'\big)\big)'$.

<u>Soluzione</u>: $$\text{F.N.D.} = (x \wedge y \wedge z) \vee \big(x \wedge y \wedge z'\big) \vee \big(x \wedge y' \wedge z\big) \vee \big(x \wedge y' \wedge z'\big)$$
$$\text{f.m.} = x$$

4 — Calcolare la forma normale disgiuntiva (= F.N.D.) e una forma minimale (= f.m.) del polinomio booleano

$$p(x,y,z) := \big(\big(y \wedge 1 \wedge z' \wedge y \wedge x\big) \vee \big(y \wedge x'\big)\big)' \wedge$$
$$\wedge \Big(\big(y \wedge \big(z \vee y' \vee 0 \vee x\big)\big) \wedge \big(\big(z' \vee x\big)' \vee \big(y \wedge 1 \wedge z \wedge x' \wedge y\big)\big)'\Big)$$

<u>Soluzione</u>: $\text{F.N.D.} = x \wedge y \wedge z = \text{f.m.}$

5 — Calcolare la forma normale disgiuntiva (= F.N.D.) e una forma minimale (= f.m.) del polinomio booleano in tre variabili

$$q(x,y,z) := \big(\, z' \vee x' \vee y' \vee z' \,\big) \wedge \big(\, z' \vee x \vee 0 \vee y \,\big) \wedge 1 \wedge \big(\, z \wedge y \wedge 1 \wedge x' \wedge y \,\big)' \ .$$

<u>Soluzione</u>:
$$\text{F.N.D.} = \big(\, x \wedge y' \wedge z \,\big) \vee \big(\, x \wedge y' \wedge z' \,\big) \vee \big(\, x' \wedge y \wedge z' \,\big) \vee \vee \big(\, x \wedge y \wedge z' \,\big) \vee \big(\, x' \wedge y' \wedge z' \,\big)$$
$$\text{f.m.} = \big(\, x \wedge y' \,\big) \vee z'$$

6 — Calcolare la forma normale disgiuntiva (= F.N.D.) e una forma minimale (= f.m.) del polinomio booleano in tre variabili

$$t(x,y,z) := \big((\, z \wedge y \wedge 1 \,) \vee x' \,\big) \wedge \Big(\big(\, y \vee x \vee 0 \vee y \,\big)' \vee \big(\, x' \vee z'\big)'\Big) \ .$$

<u>Soluzione</u>:
$$\text{F.N.D.} = (\, x \wedge y \wedge z \,) \vee \big(\, x' \wedge y' \wedge z \,\big) \vee \big(\, x' \wedge y' \wedge z' \,\big)$$
$$\text{f.m.} = (\, x \wedge y \wedge z \,\big) \vee \big(\, x' \wedge y' \,\big)$$

7 — Calcolare la forma normale disgiuntiva (= F.N.D.) e una forma minimale (= f.m.) del polinomio booleano in tre variabili

$$f(x,y,z) := \big((\, z' \wedge 1 \wedge x \,) \vee \big(\, y' \wedge z \,\big) \vee 0 \,\big) \wedge \Big(\big(\, 1 \wedge x' \wedge y \,\big) \vee \big(\, x' \vee z \,\big) \vee \big(\, y \vee 0 \vee x' \vee z \,\big)'\Big) \ .$$

<u>Soluzione</u>:
$$\text{F.N.D.} = \big(\, x \wedge y' \wedge z \,\big) \vee \big(\, x \wedge y' \wedge z' \,\big) \vee \big(\, x' \wedge y' \wedge z \,\big)$$
$$\text{f.m.} = \big(\, x \wedge y' \,\big) \vee \big(\, y' \wedge z \,\big)$$

8 — Calcolare la forma normale disgiuntiva (= F.N.D.), la somma di tutti gli implicanti primi (=s.t.i.p.) e una forma minimale (= f.m.) del polinomio booleano in tre variabili

$$\mathcal{S} := \Big(\big(\, a \vee b'' \vee a \,\big) \wedge \big(\, c'' \vee a' \vee c \vee 1' \vee b'' \,\big)\Big)' \vee \vee \Big(\big(\, b \vee 0 \vee a'' \,\big)' \wedge \big(\big(\, c'' \vee a \vee c \,\big) \vee \big(\, b \vee 0 \vee b' \,\big)' \,\big)\Big)$$

9 — Calcolare la forma normale disgiuntiva (= F.N.D.), la somma di tutti gli implicanti primi (=s.t.i.p.) e una forma minimale (= f.m.) del polinomio booleano in tre variabili

$$\mathcal{R} := \big(\, b'' \vee c \vee a' \,\big)' \vee \Big(\big(\, a' \wedge b' \,\big) \wedge \Big(\big(\, b' \vee \big(a'' \wedge c\,\big)\big) \vee (\, a \vee b \,)'\Big)\Big) \ .$$

10 — Calcolare la forma normale disgiuntiva (= F.N.D.), la somma di tutti gli implicanti primi (=s.t.i.p.) e una forma minimale (= f.m.) del polinomio booleano in tre variabili

$$f(x,y,z) := \Big(\big(\, x' \vee z\big)' \wedge \big(\, y'' \vee z\big)\Big) \vee \Big(\big(\, y \vee z' \vee x' \,\big) \wedge \big(z \vee x' \vee z\big)\Big)' \ .$$

11 — Dimostrare che il polinomio booleano $h(x,y) := \big(x \wedge y'\big) \vee \big(y \wedge x'\big)$ è equivalente al polinomio booleano $k(x,y) := (x \vee y) \wedge \big(y \wedge x\big)'$.

12 — Dati due polinomi booleani p, $q \in P_n$ in n variabili, si definiscano due nuovi polinomi al modo seguente: $p \underset{*}{\oplus} q := \big(p \wedge q'\big) \vee \big(q \wedge p'\big)$, $p \underset{\bullet}{\oplus} q := (p \vee q) \wedge \big(q \wedge p\big)'$.

Dimostrare che $p \underset{*}{\oplus} q$ è equivalente a $p \underset{\bullet}{\oplus} q$, per ogni p, $q \in P_n$.

13 — Dette $\underset{*}{\oplus}$ e $\underset{\bullet}{\oplus}$ le operazioni in P_n introdotte nell'Esercizio 8 qui sopra, e indicando con $\sim$ la relazione di equivalenza in P_n , dimostrare che per ogni p, q, $r \in P_n$ si ha

(a) $p \underset{*}{\oplus} \big(q \underset{*}{\oplus} r\big) \sim \big(p \underset{*}{\oplus} q\big) \underset{*}{\oplus} r$,

(b) $p \underset{\bullet}{\oplus} \big(q \underset{\bullet}{\oplus} r\big) \sim \big(p \underset{\bullet}{\oplus} q\big) \underset{\bullet}{\oplus} r$.

14 — Dette $\underset{*}{\oplus}$ e $\underset{\bullet}{\oplus}$ le operazioni in P_n introdotte nell'Esercizio 8 qui sopra, e indicando con $\sim$ la relazione di equivalenza in P_n , dimostrare che per ogni p, q, $r \in P_n$ si ha

(a) $p \wedge \big(q \underset{*}{\oplus} r\big) \sim \big(p \wedge q\big) \underset{*}{\oplus} \big(p \wedge r\big)$,

(b) $p \wedge \big(q \underset{\bullet}{\oplus} r\big) \sim \big(p \wedge q\big) \underset{\bullet}{\oplus} \big(p \wedge r\big)$.

15 — Sia B un'algebra di Boole, sia $f \in P_n(B)$ una funzione polinomiale in n variabili a valori in B, e siano $g_1 \in P_{k_1}(B)$, $\dots$, $g_n \in P_{k_n}(B)$ altre n funzioni polinomiale a valori in B rispettivamente in k_1, $\dots$, k_n variabili. Dimostrare che la funzione booleana $f(g_1, \dots, g_n) \in F_{k_1+\cdots+k_n}(B)$ definita (per ogni $\big(b_1, b_2, \dots, b_{k_1+\cdots+k_n}\big) \in B^{k_1+\cdots+k_n}$) da

$$\big(b_1, b_2, \dots, b_{k_1+\cdots+k_n}\big) \mapsto f\big(g_1(b_1, \dots, b_{k_1}), \dots, g_n(b_{k_1+\cdots+k_{n-1}+1}, \dots, b_{k_1+\cdots+k_{n-1}+k_n})\big)$$

è a sua volta (una funzione booleana) *polinomiale*.