ESERCIZI SU

INSIEMI ORDINATI, RETICOLI

N.B.: il simbolo ☡ contrassegna gli esercizi (relativamente) più complessi.

— ∗ —

1 — Siano E_1 ed E_2 due insiemi non vuoti, nei quali siano date rispettivamente la relazione ω_1 e la relazione ω_2 . Nel prodotto cartesiano $E_1 \times E_2$ si consideri la relazione ω definita da

$$\left(e'_1 , e'_2 \right) \omega \left(e''_1 , e''_2 \right) \iff e'_1 \, \omega_1 \, e''_1 \, , \; e'_2 \, \omega_2 \, e''_2 \qquad \forall \; \left(e'_1 , e'_2 \right) , \left(e''_1 , e''_2 \right) \in E_1 \times E_2$$

Dimostrare che:

(a) se ω_1 e ω_2 sono riflessive, allora anche ω è riflessiva;

(b) se ω_1 e ω_2 sono simmetriche, allora anche ω è simmetrica;

(c) se ω_1 e ω_2 sono antisimmetriche, allora anche ω è antisimmetrica;

(d) se ω_1 e ω_2 sono transitive, allora anche ω è transitiva;

(e) se ω_1 e ω_2 sono equivalenze, allora anche ω è un'equivalenza;

(f) se ω_1 e ω_2 sono ordini, allora anche ω è un ordine (detto *ordine prodotto* su $E_1 \times E_2$);

(g) se ω_1 e ω_2 sono entrambi ordini *totali*, allora ω è un ordine totale se e soltanto se si ha $\left| E_1 \right| = 1$ oppure $\left| E_2 \right| = 1$.

2 — Sia E un insieme non vuoto, nel quale sia data la relazione ω_1 , sia X un altro insieme non vuoto. Nell'insieme E^X di tutte le funzioni da X a E si consideri la relazione ω_X definita da

$$f \, \omega_X \, \ell \iff f(x) \, \omega \, \ell(x) \quad \forall \, x \in X \qquad \forall \; f, \ell \in E^X$$

Dimostrare che:

(a) se ω è riflessiva, allora anche ω^X è riflessiva;

(b) se ω è simmetrica, allora anche ω^X è simmetrica;

(c) se ω è antisimmetrica, allora anche ω^X è antisimmetrica;

(d) se ω è transitiva, allora anche ω^X è transitiva;

(e) se ω è un'equivalenza, allora anche ω^X è un'equivalenza;

(f) se ω è un ordine, allora anche ω^X è un ordine;

(g) se ω è un ordine *totale*, allora ω è (un ordine) totale se e soltanto se si ha $\left| E \right| = 1$.

3 — Siano E_1 ed E_2 due insiemi non vuoti, nei quali siano date rispettivamente la relazione d'ordine $\preceq_1$ e la relazione d'ordine $\preceq_2$. Nel prodotto cartesiano $E_1 \times E_2$ si consideri la relazione $\preceq \; = \; \preceq_1 \underset{\text{lex}}{\times} \preceq_2$ (detta *"prodotto lessicografico"*) così definita: per ogni $\left(e'_1, e'_2\right), \left(e''_1, e''_2\right) \in E_1 \times E_2$, si pone

$$\left(e'_1, e'_2\right) \preceq \left(e''_1, e''_2\right) \iff \left(e'_1 \preceq_1 e''_1 \,,\; e'_1 \neq e''_1\right) \text{ oppure } \left(e'_1 = e''_1 \,,\; e'_2 \preceq_2 e''_2\right)$$

Dimostrare che:

(a) $\preceq \; = \; \preceq_1 \underset{\text{lex}}{\times} \preceq_2$ è una relazione d'ordine;

(b) se $\preceq_1$ e $\preceq_2$ sono (relazioni d'ordine) *totali*, allora anche $\preceq \; = \; \preceq_1 \underset{\text{lex}}{\times} \preceq_2$ è *totale*.

4 — Siano E_1 ed E_2 due insiemi ordinati, e si consideri in $E_1 \times E_2$ l'ordine prodotto (di cui all'esercizio **1** qui sopra). Dimostrare che:

(a) se esistono $\min(E_1)$ e $\min(E_2)$, allora esiste anche $\min\left(E_1 \times E_2\right)$ che è dato da $\min\left(E_1 \times E_2\right) = \left(\min(E_1), \min(E_2)\right)$;

(b) se esistono $\max(E_1)$ e $\max(E_2)$, allora esiste anche $\max\left(E_1 \times E_2\right)$ che è dato da $\max\left(E_1 \times E_2\right) = \left(\max(E_1), \max(E_2)\right)$;

e, VICEVERSA,

(c) se esiste $\min\left(E_1 \times E_2\right)$, dato dalla coppia $\min\left(E_1 \times E_2\right) = (m_1, m_2)$, allora esistono anche $\min(E_1)$ e $\min(E_2)$, dati da $\min(E_1) = m_1$ e $\min(E_2) = m_2$;

(d) se esiste $\max\left(E_1 \times E_2\right)$, dato dalla coppia $\max\left(E_1 \times E_2\right) = (M_1, M_2)$, allora esistono anche $\max(E_1)$ e $\max(E_2)$, dati da $\max(E_1) = M_1$ e $\max(E_2) = M_2$.

5 — Sia E un insieme ordinato, sia X un altro insieme, e si consideri in E^X l'ordine standard (di cui all'esercizio **2** qui sopra). Dimostrare che:

(a) se esiste $\min(E)$, allora esiste anche $\min\left(E^X\right)$ che è dato dalla funzione costante $f_{min} \in E^X$ tale che $f_{min}(x) := \min(E)$ per ogni $x \in X$;

(b) se esiste $\max(E)$, allora esiste anche $\max\left(E^X\right)$ che è dato dalla funzione costante $f_{max} \in E^X$ tale che $f_{max}(x) := \max(E)$ per ogni $x \in X$;

e, VICEVERSA,

(c) se esiste $f_{min} \in E^X$, allora tale minimo è una funzione costante, ed esiste anche $\min(E)$, dato dal valore — unico (costante) — $f_{min}(x)$ di f_{min} per ogni $x \in X$;

(d) se esiste $f_{max} \in E^X$, allora tale massimo è una funzione costante, ed esiste anche $\max(E)$, dato dal valore — unico (costante) — $f_{max}(x)$ di f_{max} per ogni $x \in X$.

6 — Un insieme ordinato $\left(A, \leq_A\right)$ si dice *simile* ad un insieme ordinato $\left(B, \leq_B\right)$ se esiste una applicazione bijettiva $f : A \longrightarrow B$ tale che per ogni $a', a'' \in A$ si abbia

$$a' \leq_A a'' \iff f\left(a'\right) \preceq_B f\left(a''\right) \quad .$$

(a) Dimostrare che la relazione di "similitudine" tra insiemi ordinati è una relazione di equivalenza.

(b) Stabilire se $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$, dotati dell'ordinamento naturale, siano simili oppure no.

(c) Stabilire se $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$, dotati dell'ordinamento naturale, siano simili oppure no.

(d) Stabilire se $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$, dotati dell'ordinamento naturale, siano simili oppure no.

7 — *Prodotto diretto di reticoli (1):* Siano L_1 ed L_2 insiemi ordinati (con proprietà particolari, e si consideri in $L_1 \times L_2$ l'ordine prodotto (di cui all'esercizio **1** qui sopra). Dimostrare che se L_1 ed L_2 sono reticoli (rispetto agli ordini considerati), allora anche $L_1 \times L_2$ è a sua volta un reticolo (rispetto all'ordine prodotto).

8 — Siano E_1 ed E_2 due insiemi, ciascuno con una operazione, indicata rispettivamente con $\underset{1}{*}$ e $\underset{2}{*}$. Nel prodotto cartesiano $E_1 \times E_2$ si consideri l'operazione $*$ definita da

$$\left(e_1', e_2'\right) * \left(e_1'', e_2''\right) := \left(e_1' \underset{1}{*} e_1'', e_2' \underset{2}{*} e_2''\right) \qquad \forall \left(e_1', e_2'\right), \left(e_1'', e_2''\right) \in E_1 \times E_2$$

Dimostrare che:

(a) se $\underset{1}{*}$ e $\underset{2}{*}$ sono associative, allora anche $*$ è associativa;

(b) se $\underset{1}{*}$ e $\underset{2}{*}$ sono commutative, allora anche $*$ è commutativa.

9 — *Prodotto diretto di reticoli (2):* Siano $\left(L_1 \,;\, \underset{1}{\wedge}, \underset{1}{\vee}\right)$ ed $\left(L_2 \,;\, \underset{2}{\wedge}, \underset{2}{\vee}\right)$ due insiemi dotati ciascuno di due operazioni, e si considerino in $L_1 \times L_2$ le operazioni $\wedge$ e $\vee$ ottenute da $\underset{1}{\wedge}$ e $\underset{1}{\vee}$ secondo la procedura di cui all'esercizio **8** qui sopra. Dimostrare che se L_1 ed L_2 sono reticoli (rispetto alle operazioni considerate), allora anche $L_1 \times L_2$ è a sua volta un reticolo (rispetto alle operazioni considerate).

10 — Dimostrare che le due costruzioni di un *"Prodotto diretto di reticoli"* considerate negli esercizi **7** e **9** qui sopra sono equivalenti, nel senso che la relazione d'ordine considerata in $L_1 \times L_2$ nell'esercizio **7** corrisponde esattamente alle due operazioni in $L_1 \times L_2$ considerate nell'esercizio **9**, e viceversa.

11 — Sia L un insieme ordinato, sia X un altro insieme, e si consideri in L^X l'ordine standard (di cui all'esercizio **2** qui sopra). Dimostrare che se L è un reticolo (rispetto all'ordine considerato) allora anche L^X è a sua volta un reticolo (rispetto all'ordine standard).

12 — Sia E con una operazione, indicata con $*$, e sia X un altro insieme non vuoto. Nell'insieme E^X di tutte le funzioni da X ad E si consideri l'operazione $\circledast$ definita da

$$f \circledast \ell : X \longrightarrow E \,, \quad x \mapsto \big(f \circledast \ell\big)(x) := f(x) * \ell(x) \qquad \forall\, x \in X \;\;, \qquad\qquad \forall\; f, \ell \in E^X$$

Dimostrare che:

(a) se $*$ è associativa, allora anche $\circledast$ è associativa;

(b) se $*$ è commutativa, allora anche $\circledast$ è commutativa.

13 — Sia $\big(L\,;\,\wedge\,,\vee\big)$ un insieme con due operazioni, sia X un altro insieme non vuoto, e si considerino in L^X le due operazioni ottenute da $\wedge$ e da $\vee$ utilizzando la procedura di cui all'esercizio **12** qui sopra. Dimostrare che se L è un reticolo (rispetto alle operazioni considerate) allora anche L^X è a sua volta un reticolo (rispetto alle operazioni così costruite).

14 — Dato un reticolo L ed un insieme non vuoto X, dimostrare che le due costruzioni di una struttura di reticolo su L^X considerate negli esercizi **11** e **13** qui sopra sono equivalenti, nel senso che la relazione d'ordine in L^X considerata nell'esercizio **11** corrisponde esattamente alle due operazioni in L^X considerate nell'esercizio **11**, e viceversa.

15 — Siano L_1 ed L_2 due reticoli (non vuoti), e sia $L_1 \times L_2$ il reticolo prodotto diretto di essi. Dimostrare che:

(a) se L_1 e L_2 sono entrambi distributivi, allora anche $L_1 \times L_2$ è a sua volta distributivo;

(b) se L_1 e L_2 sono entrambi limitati e complementati (cioè ogni elemento ha complemento), allora anche $L_1 \times L_2$ è a sua volta limitato e complementato;

e, VICEVERSA,

(c) se $L_1 \times L_2$ è distributivo, allora anche L_1 e L_2 sono entrambi distributivi;

(d) se $L_1 \times L_2$ è limitato e complementato, allora anche L_1 e L_2 sono entrambi limitati e complementati.

16 — Sia L un reticolo (non vuoto), sia X un insieme non vuoto, e sia L^X l'insieme di tutte le funzioni da X a L, con la sua struttura standard di reticolo. Dimostrare che:

(a) se L è distributivo, allora anche L^X è a sua volta distributivo;

(b) se L è limitato e complementato, allora anche L^X è a sua volta limitato e complementato;

e, VICEVERSA,

(c) se L^X è distributivo, allora anche L è distributivo;

(d) se L^X è limitato e complementato, allora anche L è limitato e complementato.

17 — *Isomorfismi tra reticoli:* Sia $\phi : L_1 \hookrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow L_2$ una funzione biiettiva da un reticolo L_1 ad un reticolo L_2 . Dimostrare che le due seguenti proprietà per ϕ sono equivalenti:

(I) $\qquad x \leq y \iff \phi(x) \leq \phi(y)$, $\qquad$ per ogni $x, y \in L_1$;

(II) $\qquad \phi\big(x \wedge y\big) = \phi(x) \wedge \phi(y)$, $\quad \phi\big(x \vee y\big) = \phi(x) \vee \phi(y)$, $\qquad$ per ogni $x, y \in L_1$.

N.B.: una tale $\phi : L_1 \hookrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow L_2$ si dice *isomorfismo* da L_1 a L_2 ; quando una tale ϕ esiste, si dice che L_1 è isomorfo a L_2 .

18 — Sia L un reticolo, e si considerino sul prodotto $L \times L$ e sull'insieme $L^{\{1,2\}}$ di tutte le funzioni da $\{1,2\}$ a L le rispettive strutture standard di reticolo. Dimostrare che la funzione $\phi : L^{\{1,2\}} \longrightarrow L \times L$ data da $f \mapsto \phi(f) := \big(f(1), f(2)\big)$ — per ogni $f \in L^{\{1,2\}}$ — è un isomorfismo dal reticolo $L^{\{1,2\}}$ al reticolo $L \times L$.

19 — Per ogni $n \in \mathbb{N}$, sia D_n il reticolo dei divisori (in $\mathbb{N}$) di n — con relazione d'ordine la divisibilità (in $\mathbb{N}$) e operazioni $\wedge$ e $\vee$ date dal M.C.D. e dal m.c.m. — e sia $[0,n]$ l'insieme $[0,n] := \{0,1,2,\dots,n-1,n\}$ dei numeri naturali da 0 ad n, con la sua struttura naturale di reticolo indotta dall'ordine naturale (o "standard") in $\mathbb{N}$. Dimostrare allora che, per ogni primo p ed ogni $e \in \mathbb{N}$, il reticolo D_{p^e} è isomorfo al reticolo $[0,n]$.

20 — Per ogni $n \in \mathbb{N}$, sia D_n il reticolo dei divisori di n. Dimostrare che:

(a) D_{100} è isomorfo a $D_4 \times D_{25}$;

(b) D_{5400} è isomorfo a $D_8 \times D_{27} \times D_{25}$;

(c) più in generale, se $n \in \mathbb{N}_+$ si fattorizza in $n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_s^{e_s}$ con $p_1, p_2, \dots, p_s$ primi distinti, allora $D_n = D_{p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_s^{e_s}}$ è isomorfo a $D_{p_1^{e_1}} \times D_{p_2^{e_2}} \times \cdots \times D_{p_s^{e_s}}$.