

ALGEBRA e LOGICA
CdL in Ingegneria Informatica

canale M-Z
prof. Fabio GAVARINI

a.a. 2025–2026 — Sessione Estiva Anticipata, II appello

Esame scritto del 19 Febbraio 2026

..... $\Re$

*N.B.: compilare il compito in modo sintetico ma **esauriente**, spiegando
chiaramente quanto si fa, e scrivendo in corsivo con grafia leggibile.*

.....

[1] Si consideri l'insieme $\mathbb{S} := \{\flat, \natural, \sharp\}$ e il relativo insieme delle parti $\mathcal{P}(\mathbb{S})$; si consideri poi in $\mathcal{P}(\mathbb{S})$ la relazione $\multimap$ definita da

$$S' \multimap S'' \iff \left(|S'| \not\leq |S''| \text{ oppure } S' = S'' \right) \quad \forall S', S'' \in \mathcal{P}(\mathbb{S})$$

(a) Dimostrare che la relazione $\multimap$ è una relazione d'ordine.

(b) Disegnare il diagramma di Hasse dell'insieme ordinato $(\mathcal{P}(\mathbb{S}); \multimap)$.

(c) Determinare se l'insieme ordinato $(\mathcal{P}(\mathbb{S}); \multimap)$ sia un reticolo oppure no. In un caso o nell'altro, si giustifichi adeguatamente la risposta.

[2] (a) Determinare il resto di 952^{40135} nella divisione per 15.

(b) Nell'anello $\mathbb{Z}_{15}$ degli interi modulo 15, determinare se $\bar{7} := [7]_{15}$ sia invertibile (rispetto alla moltiplicazione). In caso negativo, si spieghi perché $\bar{7}$ non sia invertibile; in caso positivo, si calcoli esplicitamente la classe inversa $\bar{7}^{-1}$.

(c) Nell'anello $\mathbb{Z}_{15}$ degli interi modulo 15, determinare il sottoinsieme di tutti gli elementi invertibili (rispetto alla moltiplicazione).

[3] Calcolare la F.N.D. (=forma normale disgiuntiva), la s.t.i.p. (=somma di tutti gli implicant primari) e una f.m. (=forma minimale) per il polinomio booleano in tre variabili

$$P(x, y, z) = ((z' \wedge x' \wedge y)' \wedge (y' \vee z' \vee x))' \vee ((y' \vee z \vee y') \wedge (x' \vee 1' \vee z \vee x'))'$$

(continua...)

[4] Si consideri il reticolo D_{308} dei divisori di 308, rispetto alla relazione (d'ordine) di divisibilità.

(a) Disegnare il diagramma di Hasse del reticolo D_{308} .

(b) Determinare tutti gli atomi e tutti gli elementi $\vee$ -irriducibili di D_{308} .

(c) Determinare se esista una $\vee$ -fattorizzazione non ridondante in *fattori* $\vee$ -irriducibili per ciascuno dei due elementi $a := 28$ e $b := 22$ nel reticolo D_{308} . Se la risposta è affermativa, si determini esplicitamente (almeno) una tale $\vee$ -fattorizzazione; se invece è negativa, si spieghi perché essa non esista.

(d) Determinare se esista una $\vee$ -fattorizzazione non ridondante in *atomi* per ciascuno dei due elementi $a := 28$ e $b := 22$ nel reticolo D_{308} . Se la risposta è affermativa, si determini esplicitamente (almeno) una tale $\vee$ -fattorizzazione; se invece è negativa, si spieghi perché essa non esista.

(e) Determinare il reticolo D_{308} sia complementato oppure no. Se la risposta è affermativa, si determinino esplicitamente tutti i possibili complementi di ciascun elemento in D_{308} ; se invece è la risposta negativa, si determinino esplicitamente tutti gli elementi in D_{308} che siano privi di complemento.

[5] (a) Determinare se esistano soluzioni $(x', y') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ dell'equazione diofantea $13x + 57y = -6$. In caso negativo, si spieghi perché tali soluzioni non esistano; in caso affermativo, si calcoli esplicitamente una delle soluzioni.

(b) Determinare se esistano soluzioni dell'equazione modulare $\overline{57} \cdot \overline{x} = -\overline{19}$ nell'anello $\mathbb{Z}_{13}$ degli interi modulo 13. In caso negativo, si spieghi perché tali soluzioni non esistano; in caso affermativo, si calcolino esplicitamente *tutte* le soluzioni di tale equazione.

(c) Nell'anello $\mathbb{Z}_{13}$ degli interi modulo 13, determinare se esista l'inverso della classe $-\overline{21}$. In caso negativo, si spieghi perché tale inverso non esista; in caso affermativo, si calcoli esplicitamente tale inverso.