

ALGEBRA e LOGICA
CdL in Ingegneria Informatica

canale M-Z
prof. Fabio GAVARINI

a.a. 2025–2026 — Sessione Estiva Anticipata, II appello

Esame scritto del 19 Febbraio 2026

..... §

*N.B.: compilare il compito in modo sintetico ma **esauriente**, spiegando
chiaramente quanto si fa, e scrivendo in corsivo con grafia leggibile.*

.....

[1] Sia dato l'insieme $\mathbb{X} := \{\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}\}$ e l'insieme delle parti $\mathcal{P}(\mathbb{X})$ corrispondente; si consideri poi in $\mathcal{P}(\mathbb{X})$ la relazione $\ast$ definita da

$$X' \ast X'' \iff \left(|X'| \not\leq |X''| \text{ oppure } X' = X'' \right) \quad \forall X', X'' \in \mathcal{P}(\mathbb{X})$$

(a) Dimostrare che la relazione $\ast$ è una relazione d'ordine.

(b) Disegnare il diagramma di Hasse dell'insieme ordinato $(\mathcal{P}(\mathbb{X}); \ast)$.

(c) Determinare se l'insieme ordinato $(\mathcal{P}(\mathbb{X}); \ast)$ sia un reticolo oppure no. In ciascun caso, si giustifichi adeguatamente la risposta.

[2] (a) Determinare il resto di 892^{41023} nella divisione per 15.

(b) Nell'anello $\mathbb{Z}_{15}$ degli interi modulo 15, determinare se $\bar{8} := [8]_{15}$ sia invertibile (rispetto alla moltiplicazione). In caso positivo, si calcoli esplicitamente la classe inversa $\bar{8}^{-1}$; in caso negativo, si spieghi perché $\bar{8}$ non sia invertibile.

(c) Calcolare il sottoinsieme di tutti gli elementi invertibili (rispetto alla moltiplicazione) nell'anello $\mathbb{Z}_{15}$ degli interi modulo 15.

[3] Calcolare la F.N.D. (=forma normale disgiuntiva), la s.t.i.p. (=somma di tutti gli implicant primari) e una f.m. (=forma minimale) per il polinomio booleano in tre variabili

$$Q(a, b, c) = \left((b' \vee c \vee b') \wedge (a' \vee 1' \vee c \vee a') \right)' \vee \left((c' \wedge a' \wedge b)' \wedge (b' \vee c' \vee a) \right)'$$

(continua...)

[4] Si consideri il reticolo D_{315} di tutti i divisori di 315, con la relazione (d'ordine) di divisibilità.

(a) Disegnare il diagramma di Hasse del reticolo D_{315} .

(b) Determinare tutti gli atomi e tutti gli elementi $\vee$ -irriducibili di D_{315} .

(c) Determinare se esista una $\vee$ -fattorizzazione non ridondante in *fattori* $\vee$ -irriducibili per ciascuno dei due elementi $a := 45$ e $b := 21$ nel reticolo D_{315} . Se la risposta è affermativa, si determini esplicitamente (almeno) una tale $\vee$ -fattorizzazione; se invece è negativa, si spieghi perché essa non esista.

(d) Determinare se esista una $\vee$ -fattorizzazione non ridondante in *atomi* per ciascuno dei due elementi $a := 45$ e $b := 21$ nel reticolo D_{315} . Se la risposta è affermativa, si determini esplicitamente (almeno) una tale $\vee$ -fattorizzazione; se invece è negativa, si spieghi perché essa non esista.

(e) Determinare se il reticolo D_{315} sia complementato oppure no. Se la risposta è affermativa, si determinino esplicitamente tutti i possibili complementi di ciascun elemento in D_{315} ; se invece è la risposta negativa, si determinino esplicitamente tutti gli elementi in D_{315} che siano privi di complemento.

[5] (a) Determinare se esistano soluzioni $(x', y') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ dell'equazione diofantea $11x + 58y = -8$. In caso negativo, si spieghi perché tali soluzioni non esistano; in caso affermativo, si calcoli esplicitamente una delle soluzioni.

(b) Determinare se esistano soluzioni dell'equazione modulare $\overline{58} \cdot \overline{x} = -\overline{19}$ nell'anello $\mathbb{Z}_{11}$ degli interi modulo 11. In caso negativo, si spieghi perché tali soluzioni non esistano; in caso affermativo, si calcolino esplicitamente *tutte* le soluzioni di tale equazione.

(c) Nell'anello $\mathbb{Z}_{11}$ degli interi modulo 11, determinare se esista l'inverso della classe $-\overline{30}$. In caso negativo, si spieghi perché tale inverso non esista; in caso affermativo, si calcoli esplicitamente tale inverso.