

ALGEBRA e LOGICA
CdL in Ingegneria Informatica

canale M-Z
prof. Fabio GAVARINI

a.a. 2025-2026 — Sessione Estiva Anticipata, I appello

Esame scritto del 20 Gennaio 2026

..... ★

N.B.: compilare il compito in modo sintetico ma **esauriente**, spiegando chiaramente quanto si fa, e scrivendo in corsivo con grafia leggibile.

..... ●

[1] Dimostrare che per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha $(n^3 - n) \in 3\mathbb{N}$, cioè $(n^3 - n)$ è un multiplo (intero) di 3.

[2] Si consideri il reticolo D_{231} dei divisori di 231, relativamente alla relazione (d'ordine) di divisibilità.

(a) Disegnare il diagramma di Hasse del reticolo D_{231} .

(b) Determinare tutti gli atomi e tutti gli elementi $\vee$ -irriducibili di D_{231} .

(c) Determinare se esista una $\vee$ -fattorizzazione non ridondante in *fattori* $\vee$ -irriducibili per ciascuno dei due elementi $a := 21$ e $b := 33$ nel reticolo D_{231} . Se la risposta è affermativa, si determini esplicitamente (almeno) una tale $\vee$ -fattorizzazione; se invece la risposta è negativa, si spieghi perché essa non esista.

(d) Determinare se esista una $\vee$ -fattorizzazione non ridondante in *atomi* per ciascuno dei due elementi $a := 21$ e $b := 33$ nel reticolo D_{231} . Se la risposta è affermativa, si determini esplicitamente (almeno) una tale $\vee$ -fattorizzazione; se invece la risposta è negativa, si spieghi perché essa non esista.

(e) Determinare il reticolo D_{231} sia complementato oppure no. Se la risposta è affermativa, si determinino esplicitamente tutti i possibili complementi di ciascun elemento in D_{231} ; se invece la risposta è negativa, si determinino esplicitamente tutti gli elementi in D_{231} che siano privi di complemento.

(continua...)

[3] (a) Calcolare M.C.D.(770, 1001) e m.c.m.(1001, -770).

(b) Determinare se esista una soluzione $(x', y') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ dell'equazione diofantea

$$770x + 1001y = 848$$

In caso negativo, si spieghi perché una tale soluzione non esista; in caso affermativo, si calcoli una soluzione esplicita.

(c) Determinare tutti i valori di $z \in \mathbb{Z}$ per i quali esista (almeno) una soluzione $(x'', y'') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ dell'equazione diofantea

$$770x + 1001y = 848 + z$$

[4] Siano $H, K \in \mathbb{N}$ i due numeri che in notazione posizionale sono espressi da

$$H := (2304)_{\text{CINQUE}} \text{ in base CINQUE, } K := (3097)_{\text{DIECI}} \text{ in base DIECI,}$$

utilizzando le cinque cifre (ordinate) 0, 1, 2, 3, 4 in base CINQUE e le dieci cifre (ordinate) 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 in base DIECI.

(a) Scrivere il numero H in base DIECI.

(b) Scrivere il numero K in base NOVE, usando le nove cifre (ordinate) 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.

(c) Scrivere il numero K in base TRE, usando le tre cifre (ordinate) 0, 1, 2.

[5] Calcolare la F.N.D. (=forma normale disgiuntiva), la s.t.i.p. (=somma di tutti gli implicanti primi) e una f.m. (=forma minimale) per il polinomio booleano in tre variabili

$$P(x, y, z) = ((y \wedge 1 \wedge z' \wedge y \wedge x) \vee (x' \wedge 0' \wedge y))' \wedge \\ \wedge \left(((z' \vee x) \vee (y \wedge 1 \wedge z \wedge x' \wedge y)') \wedge (y \wedge (z \vee y' \vee 0 \vee x)) \right)'$$

SVOLGIMENTO

1 Th: $(n^3 - n) \in 3\mathbb{N}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Procediamo per induzione (semplice)
su $n \in \mathbb{N}$.

BASE: $\boxed{n=0} \Rightarrow$ in questo caso si ha

$$n^3 - n = 0^3 - 0 = 0 = 3 \cdot 0 \in 3\mathbb{N}$$

cioè $(n^3 - n) \in 3\mathbb{N}$ per $n=0 \Rightarrow \text{OK}$

PASSO INDUTTIVO: $\forall k \in \mathbb{N}$, si ha

$$\boxed{\text{Hp Ind}} \quad (k^3 - k) \in 3\mathbb{N}$$

$$\boxed{\text{Th Ind}} \quad ((k+1)^3 - (k+1)) \in 3\mathbb{N}$$

ORA, dovendo dimostrare la Th Ind,
il calcolo diretto ci dà

$$\begin{aligned} (k+1)^3 - (k+1) &= k^3 + 3k^2 + 3k + 1 - k - 1 = \\ &= \underbrace{(k^3 - k)}_{\substack{\text{per la} \\ \text{Hp Ind}}} + 3 \cdot (k^2 + k) = \underbrace{3 \cdot (k^2 + k)}_{\substack{\text{cioè } \exists t \in \mathbb{N}: \\ (k^3 - k) = 3t}} \in 3\mathbb{N} \end{aligned}$$

$\Downarrow$
 OK

2 (a) Dalla fattorizzazione in primi

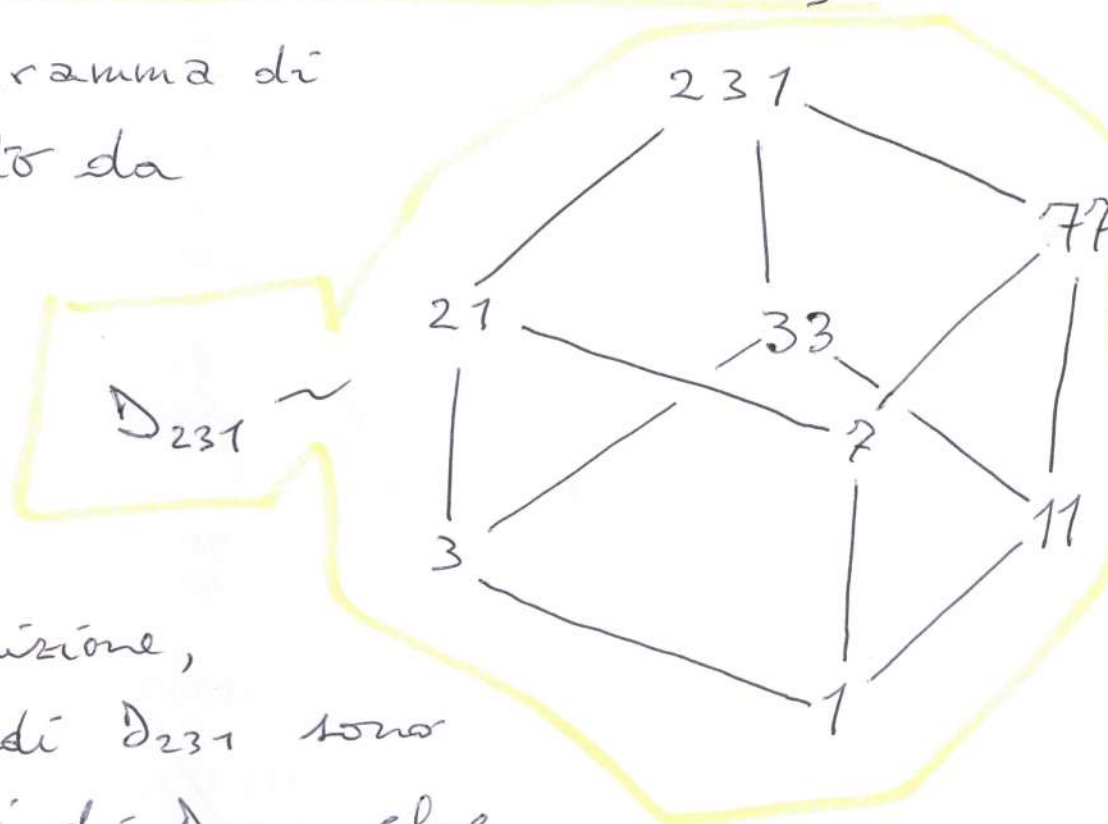
$$231 = 3 \cdot 7 \cdot 11 \quad \text{segue che}$$

$$D_{231} = \{ 3^a \cdot 7^b \cdot 11^c \mid a, b, c \in \{0, 1\} \}$$

con che $|D_{231}| = |\{0, 1\}|^3 = 2^3 = 8$ e

$$D_{231} = \{ 1, 3, 7, 11, 21, 33, 77, 231 \}$$

con diagramma di
Hasse dato da



(b) Per definizione,

gli atomi di D_{231} sono
gli elementi di D_{231} che
coprono $\min(D_{231}) = 1$, quindi dal
diagramma si vede che

$$\{\text{atomi di } D_{231}\} = \{ \underline{3}, \underline{7}, \underline{11} \}$$

Gli elementi V -irriducibili di D_{231} sono i suoi atomi e anche $\min(D_{231}) = 1$, quindi

$$\{\text{V-irriducibili di } D_{231}\} = \{1, 3, 7, 11\}$$

(c)-(d) Sia $a := 21$ che $b := 33$

hanno una V -fattorizzazione non ridondante in fattori V -irriducibili e una in atomi che coincidono, precisamente

$$a := 21 = 3 \vee 7, \quad b := 33 = 3 \vee 11$$

(e) Il reticolo D_{231} è complementato, con

$$1' = 231, \quad 231' = 1$$

$$3' = 77, \quad 77' = 3$$

$$7' = 33, \quad 33' = 7$$

$$11' = 21, \quad 21' = 11$$

Notiamo anche che D_{231} è distributivo, e quindi sappiamo a priori che il complemento d' di un $d \in D_{231}$, qualora esista, è sempre unico.

3 (a) Posso seguire due metodi distinti:

1° metodo: fattorizzo 770 e 1001 in primi

$$770 = 7 \cdot 11 \cdot 2 \cdot 5, \quad 1001 = 11 \cdot 7 \cdot 13$$

da cui ricavo

$$\text{MCD}(770, 1001) \sim 7 \cdot 11 = 77$$

e anche

$$\text{mcm}(1001, -770) \sim \text{mcm}(-770, 1001) \sim$$

$$\sim \text{mcm}(770, 1001) \sim 7 \cdot 11 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 13 = 10010$$

cioè $\text{mcm}(1001, -770) \sim 10010$

2° metodo: ① calcolo $\text{MCD}(770, 1001) =: d$

con l'algoritmo euclideo delle divisioni successive;

② Osservo (come prima, in (a)) che $\text{mcm}(1001, -770) \sim \text{mcm}(770, 1001)$;

③ Calcolo $\text{mcm}(1001, -770) \sim \text{mcm}(770, 1001)$

tramite la formula

$$\text{mcm}(a, b) \sim \frac{a \cdot b}{\text{MCD}(a, b)} \quad \text{per} \quad \begin{aligned} a &:= 770 \\ b &:= 1001 \end{aligned}$$

ORA, per ① i calcoli danno

$$770 = 1001 \cdot 0 + 770$$

$$1001 = 770 \cdot 1 + 231$$

$$770 = 231 \cdot 3 + \boxed{77} \Rightarrow \text{MCD}(770, 1001) \sim 77$$

$$231 = 77 \cdot 3 + \boxed{0} \rightarrow \text{STOP!}$$

dunque $\text{MCD}(770, 1001) \sim 77$

POI, per ③ si ha

$$\text{mcm}(1001, -770) = \frac{770 \cdot 1001}{77} = 10010$$

cioè $\text{mcm}(1001, -770) \sim 10010$.

(b) Dalla teoria generale sappiamo che

$$\exists \text{ soluzione di } (*) : 770 \cdot x + 1001 \cdot y = 848 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow d := \text{MCD}(770, 1001) \mid 848$$

QUINDI, per il risultato in (a), e

$$\exists \text{ soluzione di } (*) \Leftrightarrow 77 \mid 848$$

A questo punto, possiamo concludere

in due modi (quasi uguali):

1° modo: diviso esplicitamente

848 per 77, e trovo

$$\begin{array}{r|l} 848 & 77 \\ 78 & 11 \\ 1 & \end{array}$$

$$\Leftrightarrow 848 = 77 \cdot 11 + 1$$

↑
quoziente

↑
resto

e siccome il resto della divisione è (1, quindi è) diverso da 0, si conclude che $77 \nmid 848$, e

QUINDI non soluzioni di (*).

2° modo: trovo la classe resto di 848

modulo 77, cioè calcolo $\overline{848} := [848]_{77} \in \mathbb{Z}_{77}$ per passi successivi, ciascuno "elementare"...

$$\overline{848} = \overline{78} = \overline{1}, \Rightarrow \overline{848} = \overline{1}$$

↑ perché $84 = 77 + 7$ perché $78 = 77 + 1$

poiché è $\overline{848} = \overline{1} \neq \overline{0}$ in $\mathbb{Z}_{77}$, si conclude che $77 \nmid 848$ e QUINDI non soluzioni di (*).

(c) Con la stessa analisi fatta per (b),
abbiamo che, $\forall z \in \mathbb{Z}$,

$\exists$ soluzioni di

$$\textcircled{*}_z: 770 \cdot x + 1001 \cdot y = 848 + z \iff d \mid \delta_z(848 + z)$$

$$\text{dove } d := \text{MCD}(770, 1001) = 77$$

ALLORA

$$\exists \text{ soluzioni di } \textcircled{*}_z \iff 77 \mid \delta_z(848 + z) \iff$$

$$\iff (848 + z) \equiv 0 \pmod{77} \iff$$

$$\iff \overline{848 + z} = \overline{0} \text{ in } \mathbb{Z}_{77} \iff$$

$$\iff \overline{848} + \overline{z} = \overline{0} \text{ in } \mathbb{Z}_{77} \iff$$

$$\iff \overline{1} + \overline{z} = \overline{0} \text{ in } \mathbb{Z}_{77} \iff$$

$$\iff \overline{z} = -\overline{1} = \overline{-1} \text{ in } \mathbb{Z}_{77} \iff$$

$$\iff z \equiv -1 \pmod{77} \text{ in } \mathbb{Z} \iff$$

$$\iff z \in (-1 + 77 \cdot \mathbb{Z}) = \{-1 + 77 \cdot k \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

QUINDI

$\exists$ soluzioni
di z

$$\iff z \in \{-1 + 77 \cdot k \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

4 (a) Direttamente dalle definizioni segue che

SCRITTO IN BASE
 $D := \text{"DIECI"}$

$$\begin{aligned} H &:= (2304)_5 = 2 \cdot 5^3 + 3 \cdot 5^2 + 0 \cdot 5^1 + 4 \cdot 5^0 = \\ &= (2)_5 \cdot (125)_D + (3)_5 \cdot (25)_D + (0)_5 \cdot (5)_D + (4)_5 \cdot (1)_D = \\ &= (250)_D + (75)_D + (0)_D + (4)_D = \\ &= (329)_D \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 250 + \\ 75 + \\ 0 + \\ 4 = \\ \hline 329 \end{array}_D$$

CIOE'

$H = (329)_D$

 in base $D := \text{"DIECI"}$

(b) Possiamo procedere seguendo due metodi:

1° metodo: direttamente dalle definizioni, calcolando le cifre della scrittura posizionale di k in base 9 come resti nella divisione per 9 dei vari passi di un algoritmo (standard) iterativo o con i calcoli, scritti in base $D := \text{"DIECI"}$, ci danno quanto segue:

$$K := 3097 = 9 \cdot 344 + 1$$

$$344 = 9 \cdot 38 + 2$$

$$38 = 9 \cdot 4 + 2$$

$$4 = 9 \cdot 0 + 4$$

QUINDI

$$(4221)_9 = K$$

è la scrittura
posizionale di K
in base 9

2° metodo: L'eccezione la relazione tra le due
basi $D := \text{"DIECI"}$ e $9 := \text{"NOVE"}$ è molto
semplice, precisamente $D = 9 + 1$,

possiamo ricavare l'espressione di K in base 9
direttamente da quella in base D degli
sviluppi delle potenze di D come

$$D^k = (9+1)^k = \sum_{s=0}^k \binom{k}{s} 9^{k-s} \cdot 1^s = 9^k + k \cdot 9^{k-1} + \dots + 1$$

e da alcuni calcoli successivi...

(N.B.: ovviamente, questo "conviene" se
la scrittura iniziale - in base D - è un
po' "corta"...). Esplicitamente, si trova

$$\begin{aligned}
K &:= (3097)_9 = 3 \cdot 9^3 + 0 \cdot 9^2 + 9 \cdot 9^1 + 7 \cdot 9^0 = \\
&= 3 \cdot (9+1)^3 + 0 + 9 \cdot (9+1) + 7 = \\
&= 3 \cdot (9^3 + 3 \cdot 9^2 + 3 \cdot 9 + 1) + 9 \cdot (9+1) + 7 = \\
&= 3 \cdot 9^3 + 9 \cdot 9^2 + 9 \cdot 9 + 3 + 9^2 + 9 + 7 = \\
&= 3 \cdot 9^3 + 9^3 + 9^2 + 3 + 9^2 + 9 + 7 = \\
&= (3+1) \cdot 9^3 + (1+1) \cdot 9^2 + 9 + (3+7) = \\
&= 4 \cdot 9^3 + 2 \cdot 9^2 + 9 + (9+1) = \\
&= 4 \cdot 9^3 + 2 \cdot 9^2 + (1+1) \cdot 9 + 1 = \\
&= 4 \cdot 9^3 + 2 \cdot 9^2 + 2 \cdot 9 + 1 = (4221)_9
\end{aligned}$$

ciò è

$$K = (4221)_9$$

è la scrittura

posizionale di K in base 9

(c) Possiamo seguire due metodi:

1° metodo: come in (b) - per il 1° metodo -
calcoliamo le cifre di K in base 3 come
resti di divisioni successive per 3. Con

$$K := (3097)_9 = 3 \cdot 1032 + 1$$

N.B.: i calcoli sono scritti in base $9 := \text{"DEC"}$

$$1032 = 3 \cdot 344 + 0$$

$$344 = 3 \cdot 114 + 2$$

$$114 = 3 \cdot 38 + 0$$

$$38 = 3 \cdot 12 + 2$$

$$12 = 3 \cdot 4 + 0$$

$$4 = 3 \cdot 1 + 1$$

$$1 = 3 \cdot 0 + 1$$

$$(11020201)_3 = K$$



QUESTA è la scrittura provvisoria di K in base 3

2° metodo: come in (c) - 2° metodo! -

possiamo ricavare la scrittura di K in base 3 direttamente da quella in base 9 sfruttando la relazione

$9 = 3^2$ (per convertire le potenze di 9 in potenze di 3) e riscrivendo in base 3 ciascuna delle nove cifre 0, 1, 2, ..., 7, 8 che usiamo in base 9.

ORA, la "tabella di conversione delle cifre" è questa

BASE 9	0	1	2	3	4	5	6	7	8
BASE 3	00	01	02	10	11	12	20	21	22

e quindi abbiamo, partendo dal risultato trovato in (b), e da $9^k = 3^{2k} (\forall k)$,

$$K := (3097)_9 = (4 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1)_9 =$$

$$= (4)_9 \cdot 9^3 + (2)_9 \cdot 9^2 + (2)_9 \cdot 9^1 + (1)_9 \cdot 9^0 =$$

$$= (11)_3 \cdot 3^6 + (02)_3 \cdot 3^4 + (02)_3 \cdot 3^2 + (01)_3 \cdot 3^0 =$$

$$= (11)_3 \cdot (1000000)_3 +$$

$$+ (02)_3 \cdot (10000)_3 +$$

$$+ (02)_3 \cdot (100)_3 +$$

$$+ (01)_3 =$$

$$= (11000000)_3 + (20000)_3 + (200)_3 + (01)_3 =$$

$$(11.02.02.01)_3$$

la scrittura
posizionale di
K in base 3 è

$$K = (11020201)_3$$

[5] Per prima cosa, riduco $P(x, y, z)$ a una forma equivalente che però sia una somma di prodotti fondamentali.

PRIMA di fare calcoli, riscrivo

$$P(x, y, z) = A(x, y, z) \wedge B(x, y, z)$$

con

$$A(x, y, z) := ((y \wedge 1 \wedge z' \wedge y \wedge x) \vee (x' \wedge 0' \wedge y))'$$

$$B(x, y, z) := (C(x, y, z) \wedge D(x, y, z))'$$

$$\text{dove } C(x, y, z) := (z' \vee x) \vee (y \wedge 1 \wedge z \wedge x' \wedge y)'$$

$$D(x, y, z) := y \wedge (z \vee y' \vee 0 \vee x)$$

⊛

ORA, i calcoli danno

$$\begin{aligned} \underline{A(x, y, z)} &:= ((y \wedge 1 \wedge z' \wedge y \wedge x) \vee (x' \wedge 0' \wedge y))' \sim \\ &\sim ((x \wedge y \wedge z') \vee (x' \wedge y))' \sim (x \wedge y \wedge z')' \wedge (x' \wedge y)' \sim \\ &\sim \underline{(x' \vee y' \vee z) \wedge (x \vee y')} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{C(x, y, z)} &:= (z' \vee x) \vee (y \wedge 1 \wedge z \wedge x' \wedge y)' \sim \\ &\sim (x \vee z') \vee (x' \wedge y \wedge z)' \sim x \vee z' \vee (x \vee y' \vee z') \sim \\ &\sim \underline{x \vee y' \vee z'} \end{aligned}$$

$$\underline{D(x, y, z) := y \wedge (z \vee y' \vee 0 \vee x) \sim}$$

$$\sim \underline{y \wedge (x \vee y' \vee z)}$$

e allora

$$\underline{B(x, y, z) := (C(x, y, z) \wedge D(x, y, z))' \sim}$$

$$\sim C(x, y, z)' \vee D(x, y, z)' \sim$$

$$\sim (x \vee y' \vee z')' \vee (y \wedge (x \vee y' \vee z))' \sim$$

$$\sim (x' \wedge y \wedge z) \vee (y' \vee (x \vee y' \vee z)') \sim$$

$$\sim (x' \wedge y \wedge z) \vee y' \vee (x' \wedge y \wedge z') \sim$$

$$\sim (x' \wedge y \wedge z) \vee (x' \wedge y \wedge z') \vee y' \sim \underline{(x' \wedge y) \vee y'}$$

e quindi per

$$\underline{P(x, y, z) = A(x, y, z) \wedge B(x, y, z) \sim}$$

$$\sim ((x' \vee y' \vee z) \wedge (x \vee y')) \wedge ((x' \wedge y) \vee y') \sim$$

$$\sim ((x' \vee y' \vee z) \wedge (x \vee y') \wedge (x' \wedge y)) \vee$$

$$\vee ((x' \vee y' \vee z) \wedge (x \vee y') \wedge \underline{y'}) \sim$$

$$((x' \vee y' \vee z) \wedge \underline{(x \vee y')} \wedge \underline{(x \vee y')'}) \vee y' \sim$$

$$\sim ((x' \vee y' \vee z) \wedge 0) \vee y' \sim 0 \vee y' \sim \underline{y'}$$

per assorbimento
(due volte!)

poiché
 $\alpha \wedge \alpha' \sim 0$

QUINDI in conclusione si ha

$$P(x, y, z) \sim y' \quad (\text{che è s.d.p.f. !})$$

Ovviamente, questa è anche la
s.d.i.p. di P , e la (unica!)
f.m. di P , cioè

$$\text{s.d.i.p.}(P(x, y, z)) = y'$$

$$\text{f.m.}(P(x, y, z)) = y'$$

mentre la F.N.D. di $P(x, y, z)$ è data
dalla somma di tutti i prodotti
fondamentali e completi che contengano
 y' (e non y), cioè

$$\text{F.N.D.}(P(x, y, z)) =$$

$$= (x \wedge y' \wedge z) \vee (x \wedge y' \wedge z') \vee (x' \wedge y' \wedge z) \vee (x' \wedge y' \wedge z') \quad . \quad \square$$