

ALGEBRA e LOGICA
CdL in Ingegneria Informatica

canale M-Z
prof. Fabio GAVARINI

a.a. 2025–2026 — Sessione Estiva Anticipata, I appello
Esame scritto del 20 Gennaio 2026

..... ★

*N.B.: compilare il compito in modo sintetico ma **esauriente**, spiegando
chiaramente quanto si fa, e scrivendo in corsivo con grafia leggibile.*

..... ●

[1] Dimostrare che per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha $(n^3 - n) \in 3\mathbb{N}$, cioè $(n^3 - n)$ è un multiplo (intero) di 3.

[2] Si consideri il reticolo D_{231} dei divisori di 231, relativamente alla relazione (d'ordine) di divisibilità.

(a) Disegnare il diagramma di Hasse del reticolo D_{231} .

(b) Determinare tutti gli atomi e tutti gli elementi \vee -irriducibili di D_{231} .

(c) Determinare se esista una \vee -fattorizzazione non ridondante in *fattori \vee -irriducibili* per ciascuno dei due elementi $a := 21$ e $b := 33$ nel reticolo D_{231} . Se la risposta è affermativa, si determini esplicitamente (almeno) una tale \vee -fattorizzazione; se invece la risposta è negativa, si spieghi perché essa non esista.

(d) Determinare se esista una \vee -fattorizzazione non ridondante in *atomi* per ciascuno dei due elementi $a := 21$ e $b := 33$ nel reticolo D_{231} . Se la risposta è affermativa, si determini esplicitamente (almeno) una tale \vee -fattorizzazione; se invece la risposta è negativa, si spieghi perché essa non esista.

(e) Determinare il reticolo D_{231} sia complementato oppure no. Se la risposta è affermativa, si determinino esplicitamente tutti i possibili complementi di ciascun elemento in D_{231} ; se invece la risposta è negativa, si determinino esplicitamente tutti gli elementi in D_{231} che siano privi di complemento.

(continua...)

[3] (a) Calcolare M.C.D.(770, 1001) e m.c.m.(1001, -770).

(b) Determinare se esista una soluzione $(x', y') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ dell'equazione diofantea

$$770x + 1001y = 848$$

In caso negativo, si spieghi perché una tale soluzione non esista; in caso affermativo, si calcoli una soluzione esplicita.

(c) Determinare tutti i valori di $z \in \mathbb{Z}$ per i quali esista (almeno) una soluzione $(x'', y'') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ dell'equazione diofantea

$$770x + 1001y = 848 + z$$

[4] Siano $H, K \in \mathbb{N}$ i due numeri che in notazione posizionale sono espressi da

$$H := (2304)_{\text{CINQUE}} \quad \text{in base CINQUE}, \quad K := (3097)_{\text{DIECI}} \quad \text{in base DIECI},$$

utilizzando le cinque cifre (ordinate) 0, 1, 2, 3, 4 in base CINQUE e le dieci cifre (ordinate) 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 in base DIECI.

(a) Scrivere il numero H in base DIECI.

(b) Scrivere il numero K in base NOVE, usando le nove cifre (ordinate) 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.

(c) Scrivere il numero K in base TRE, usando le tre cifre (ordinate) 0, 1, 2.

[5] Calcolare la F.N.D. (=forma normale disgiuntiva), la s.t.i.p. (=somma di tutti gli implicanti primi) e una f.m. (=forma minimale) per il polinomio booleano in tre variabili

$$P(x, y, z) = ((y \wedge 1 \wedge z' \wedge y \wedge x) \vee (x' \wedge 0' \wedge y))' \wedge \\ \wedge \left(((z' \vee x) \vee (y \wedge 1 \wedge z \wedge x' \wedge y))' \wedge (y \wedge (z \vee y' \vee 0 \vee x)) \right)'$$
