ALGEBRA e LOGICA

CdL in Ingegneria Informatica

proff. Fabio GAVARINI / Andrea SANTI

a.a. 2021–2022 — Sessione Invernale, II appello

Esame scritto del 23 Febbraio 2023

.....

*N.B.: compilare il compito in modo sintetico ma **esauriente**, spiegando chiaramente quanto si fa, e scrivendo in corsivo con grafia leggibile.*

..... *

[1] Se a è un qualsiasi numero razionale, si indichi con $[a]$ la *parte intera* di a , ossia il massimo numero *intero* minore o uguale ad a . Si consideri la funzione

$$f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}, \quad z \mapsto f(z) := ([z]_2, [z/2]) \quad \forall z \in \mathbb{Z}$$

dove $[z]_2$ indica la classe di congruenza modulo 2 di z .

(a) Dimostrare che f è una biiezione.

(b) Descrivere esplicitamente la funzione inversa $f^{-1} : \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$.

(c) Dato il sottoinsieme $A := \{([1]_2, 3z) \mid z \in \mathbb{Z}\}$, si descriva esplicitamente la sua controimmagine $f^{-1}(A)$ rispetto a f .

[2] Determinare l'insieme di tutti i numeri interi che risolvano il seguente sistema di tre equazioni congruenziali

$$\begin{cases} 146x \equiv_3 61 \\ 160x \equiv_7 113 \\ 137x \equiv_5 -144 \end{cases}$$

[3] Si consideri il polinomio booleano nelle tre variabili x, y, z dato da

$$P(x, y, z) := (y \vee x')' \vee \left((y' \wedge x' \wedge z)' \wedge (z' \vee x \vee y') \right)' \vee \left((y \vee x' \vee z') \wedge (z' \vee y \vee x) \right)'$$

(a) Determinare la forma normale disgiuntiva $D(x, y, z)$ del polinomio $P(x, y, z)$.

(b) Determinare una forma minimale $Q(x, y, z)$ del polinomio $P(x, y, z)$.

(c) Determinare la grandezza $G_f := (E_f, F_f)$ per ciascuno dei due polinomi $f := D(x, y, z)$ e $f := Q(x, y, z)$.

[4] Dati due numeri interi $a, b \in \mathbb{Z}$, dimostrare che

$$5^a \equiv_7 5^b \iff a \equiv_6 b$$

[5] Si consideri il reticolo D_{90} dei divisori di 90 (in $\mathbb{N}$), con la usuale relazione d'ordine data dalla divisibilità δ .

(a) Disegnare il diagramma di Hasse dell'insieme ordinato $(D_{90}; \delta)$.

(b) Determinare tutti gli atomi e tutti gli elementi $\vee$ -irriducibili di $(D_{90}; \delta)$.

(c) Per ogni elemento di D_{90} , esibire esplicitamente una sua $\vee$ -fattorizzazione non ridondante in fattori $\vee$ -irriducibili.

(d) Determinare, giustificando adeguatamente la risposta, se il reticolo $(D_{90}; \delta)$ sia un'algebra di Boole oppure no.

(e) Determinare tutti gli elementi massimali e tutti gli elementi minimali del sottoinsieme ordinato $D' := D_{90} \setminus \{90, 1, 3\}$ di D_{90} .

[6] Dimostrare per induzione che

$$\prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{n+1}{2n} \quad \forall n \in \mathbb{N} : n \geq 2$$