

ALGEBRA e LOGICA

CdL in Ingegneria Informatica

proff. Fabio GAVARINI / Andrea SANTI

a.a. 2021-2022 — Sessione Estiva, II appello

Esame scritto del 5 Luglio 2022

.....

N.B.: compilare il compito in modo sintetico ma **esauriente**, spiegando chiaramente quanto si fa, e scrivendo in corsivo con grafia leggibile.

.....

[1] Dimostrare che $\sum_{k=0}^n (-1)^k k^2 = (-1)^n \frac{n(n+1)}{2}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

[2] Scrivere in base OTTO il numero $n \in \mathbb{N}$ che in base DUE è espresso dalla scrittura posizionale $n = (11010111011)_{\text{DUE}}$.

[3] Sia $\bowtie$ la relazione in $\mathbb{N}$ definita da

$$h \bowtie k \iff 3h^2 - h + 5 \equiv_7 3k^2 - k + 5 \quad \forall h, k \in \mathbb{N}$$

dove $\equiv_7$ indica la relazione di congruenza modulo 7 tra numeri interi.

(a) Dimostrare che la relazione $\bowtie$ è una equivalenza in $\mathbb{N}$.

(b) Descrivere esplicitamente la classe di $\bowtie$ -equivalenza $[0]_{\bowtie}$ di 0 in $\mathbb{N}$.

[4] Determinare il resto di 1354^{32} nella divisione per 64.

[5] Si consideri il polinomio Booleano nelle tre variabili x, y, z dato da

$$P(x, y, z) := (y \wedge z) \vee x \vee (y \wedge z') \vee \left((x \wedge y \wedge z)' \vee (x \wedge z' \wedge x')' \vee (z \wedge 1) \vee y \right)'$$

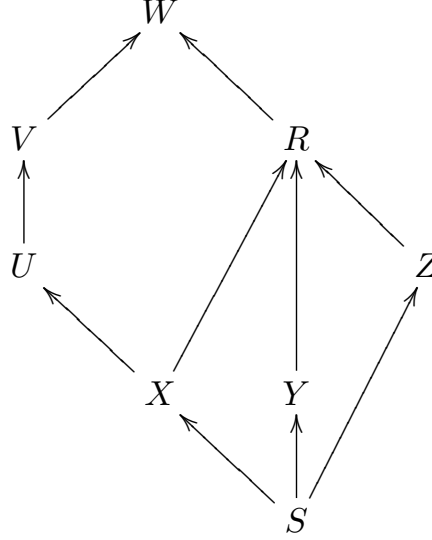
(a) Determinare una forma minimale $Q(x, y, z)$ del polinomio $P(x, y, z)$;

(b) Determinare la forma normale disgiuntiva $D(x, y, z)$ del polinomio $P(x, y, z)$;

(c) Determinare la grandezza $G_f := (E_f, F_f)$ per i due polinomi $f := Q(x, y, z)$ e $f := D(x, y, z)$.

(continua...)

[6] Sia $(\mathbb{F}; \preceq)$ l'insieme ordinato in cui $\mathbb{F} := \{S, R, X, Y, Z, U, V, W\}$ e la relazione d'ordine $\preceq$ è determinata dal seguente diagramma di Hasse:



(a) Verificare che l'insieme ordinato $(\mathbb{F}; \preceq)$ è un reticolo, precisando esplicitamente chi siano $\sup_{\preceq}(a, b)$ e $\inf_{\preceq}(a, b)$ per ogni possibile scelta di $a, b \in \mathbb{F}$ tali che $a \not\preceq b$ e $b \not\preceq a$;

(b) Si determini, giustificando opportunamente la risposta, se il reticolo $(\mathbb{F}; \preceq)$ è un'algebra di Boole oppure no;

(c) Stabilire se esista un numero $n \in \mathbb{N}$ per il quale il reticolo $(\mathbb{F}; \preceq)$ sia isomorfo ad un sottoreticolo del reticolo $(D_n; \delta)$ dei divisori di n , dove δ indica la relazione di divisibilità.