ALGEBRA e LOGICA

CdL in Ingegneria Informatica

prof. Fabio GAVARINI

a.a. 2020–2021 — Sessione Estiva, I appello

Esame scritto del 7 Settembre 2021

. . . .

N.B.: compilare il compito in modo <u>*sintetico*</u> *ma* **esauriente***, spiegando chiaramente quanto si fa, e scrivendo in corsivo con grafia leggibile.*

. . . .

[1] Siano X , Y e Z tre insiemi.

(a) Dimostrare che se $h : X \longrightarrow Y$ e $k : Y \longrightarrow Z$ sono funzioni iniettive, allora la funzione composta $k \circ h : X \longrightarrow Z$ è a sua volta iniettiva.

(b) Dimostrare che se $f : X \longrightarrow Y$ e $\ell : Y \longrightarrow X$ sono funzioni tali che $\ell \circ f = id_X$, allora f è iniettiva e ℓ è suriettiva.

[2] Fissato $n \in \mathbb{N}_+$, si consideri in $\mathbb{Z}$ la relazione $\underset{n}{\multimap}$ definita da

$$h \underset{n}{\multimap} k \iff \exists\ \nu \in \mathbb{N} \ :\ k - h = n\,\nu \qquad\qquad \forall \quad h\,,k \in \mathbb{Z}$$

(a) Dimostrare che $\underset{n}{\multimap}$ è una relazione d'ordine.

(b) Dimostrare che, per ogni $n > 1$, la relazione d'ordine $\underset{n}{\multimap}$ non è totale.

(c) Ponendo $n := 3$, si descriva esplicitamente l'intervallo

$$[\,-4\,,+17\,]_{\underset{3}{\multimap}} := \big\{\, z \in \mathbb{Z} \;\big|\; -4 \underset{3}{\multimap} z \underset{3}{\multimap} +17 \,\big\}$$

(d) Per ogni $z \in \mathbb{Z}$, si descriva esplicitamente la "stringa attraverso z"

$$\langle\, z\,\rangle_{\underset{n}{\multimap}} := \big\{\, z_\circ \in \mathbb{Z} \;\big|\; z \underset{n}{\multimap} z_\circ \text{ oppure } z_\circ \underset{n}{\multimap} z \,\big\}$$

(e) Dimostrare che l'unione della relazione $\underset{n}{\multimap}$ e della sua inversa è la relazione di congruenza modulo n , cioè $\underset{n}{\multimap} \cup \underset{n}{\multimap}^{-1} = \equiv_n$.

[3] Determinare il resto del numero $N := (-207)^{24695}$ nella divisione per 21.

(continua...)

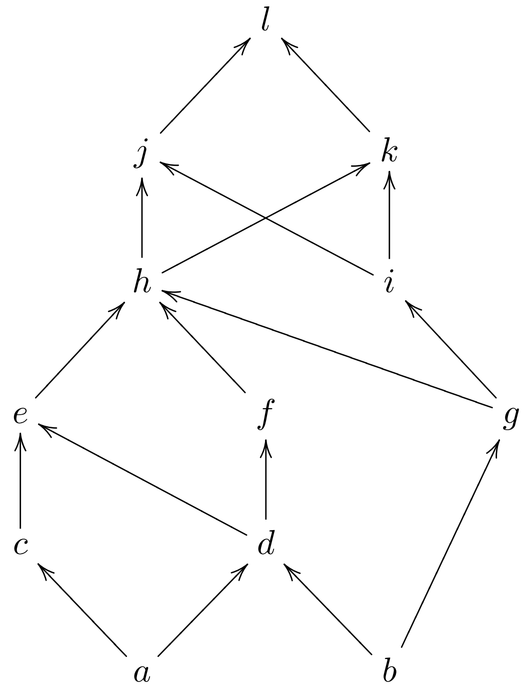
[4] Si consideri il polinomio booleano — nelle tre variabili x, y e z — dato da

$$P(x,y,z) \;:=\; \Big(\big(x \vee z' \vee 0 \vee y' \,\big) \wedge \big(z \vee 1' \vee x' \,\big) \wedge \big((y \wedge 1)' \vee z \vee x'' \,\big) \Big)' \vee$$
$$\vee \Big(\big(z \vee 1' \vee \big(y' \vee 0 \vee \big(x \wedge 1 \wedge y'\big)\big)\big) \wedge \big(\big(x'' \vee \big((z \wedge y' \wedge 1)' \vee x \,\big)\big)' \vee y \vee \big(1' \vee z\big)' \Big) \Big)'$$

(a) Calcolare la *forma normale disgiuntiva* del polinomio P.

(b) Calcolare una *forma minimale* del polinomio P.

[5] Si consideri l'insieme $\mathbb{E} := \{ a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l \}$, munito della relazione d'ordine $\preceq$ descritta dal seguente diagramma di Hasse:



Consideriamo poi i sottoinsiemi $\mathbb{F}$, $\mathbb{G}$ e $\mathbb{H}$ di $\mathbb{E}$ definiti da

$$\mathbb{F} \;:=\; \{ a, b, c, d, e, f, g, h, i, k \}$$
$$\mathbb{G} \;:=\; \{ d, e, f, g, h, i \} \quad , \qquad \mathbb{H} \;:=\; \{ b, d, e, f, g, h \}$$

dotati a loro volta della relazione d'ordine indotta da $\mathbb{E}$, indicata ancora con $\preceq$.

(a) Determinare gli elementi massimali e gli elementi minimali di $\mathbb{F}$, e precisare se esistano $\max_{\preceq}(\mathbb{F})$ e $\min_{\preceq}(\mathbb{F})$, specificandone (qualora esista) il valore esatto.

(b) Determinare se esistano $\max_{\preceq}(\mathbb{G})$, $\min_{\preceq}(\mathbb{G})$, $\sup_{\mathbb{E}}(\mathbb{G})$, $\inf_{\mathbb{E}}(\mathbb{G})$, specificandone (qualora esista) il valore esatto.

(c) Determinare se $\big(\mathbb{E}\,;\preceq\big)$ sia un reticolo oppure no.

(d) L'insieme ordinato $\big(\mathbb{H}\,;\preceq\big)$ è un reticolo limitato. Determinare (giustificando la conclusione) se tale reticolo sia distributivo e se sia complementato.