

ALGEBRA e LOGICA
CdL in Ingegneria Informatica
prof. Fabio GAVARINI

a.a. 2020–2021 — Sessione Estiva, II appello

Esame scritto del 30 Agosto 2021

.....

*N.B.: compilare il compito in modo sintetico ma **esauriente**, spiegando
chiaramente quanto si fa, e scrivendo in corsivo con grafia leggibile.*

.....

[1] Nell'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali si consideri la relazione η definita da

$$a \eta b \iff a^2 - b^2 = 5(a - b) \qquad \forall a, b \in \mathbb{Q}$$

(a) Dimostrare che la relazione η è un'equivalenza in $\mathbb{Q}$.

(b) Descrivere esplicitamente la classe di η -equivalenza di (-1) .

(c) Dimostrare che esiste una e una sola classe di η -equivalenza in $\mathbb{Q}$ che possiede esattamente uno e un solo elemento.

(d) Descrivere esplicitamente l'unica classe di η -equivalenza — menzionata al punto (c) qui sopra — che possiede esattamente uno e un solo elemento.

(e) Dimostrare che ogni classe di η -equivalenza che sia *diversa* da quella con un solo elemento — di cui al punto (c) — possiede esattamente due elementi distinti.

[2] Dimostrare che per ogni $n \in \mathbb{N}_+$ vale la seguente identità:

$$\sum_{s=1}^n \frac{1}{s(s+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

[3] Siano H e K i numeri espressi in base 9 e in base 3 dalle rispettive scritture posizionali $H := (76054)_9$ e $K := (211021222)_3$.

(a) Scrivere H in base 3.

(b) Scrivere K in base 9.

[4] Per ciascuno dei due valori $n = 17$ e $n = 18$ si consideri il corrispondente anello $\mathbb{Z}_n$ delle classi resto dei numeri interi modulo n .

(a) Descrivere esplicitamente i due gruppi degli elementi invertibili

$$\begin{aligned} U(\mathbb{Z}_{17}) &:= \{ \bar{z} \in \mathbb{Z}_{17} \mid \exists \bar{z}^{-1} \in \mathbb{Z}_{17} : \bar{z} \cdot \bar{z}^{-1} = \bar{1} \} \\ U(\mathbb{Z}_{18}) &:= \{ \bar{z} \in \mathbb{Z}_{18} \mid \exists \bar{z}^{-1} \in \mathbb{Z}_{18} : \bar{z} \cdot \bar{z}^{-1} = \bar{1} \} \end{aligned}$$

(b) Risolvere, se possibile, ciascuna delle tre equazioni seguenti:

$$\bar{57} \cdot \bar{x} = -\bar{21} \text{ in } \mathbb{Z}_{17}, \quad \bar{21} \cdot \bar{x} = \bar{14} \text{ in } \mathbb{Z}_{18}, \quad \bar{57} \cdot \bar{x} = -\bar{39} \text{ in } \mathbb{Z}_{18}.$$

(c) Determinare — se esiste — la classe $\bar{57}^{-1} \in \mathbb{Z}_{17}$ inversa della classe $\bar{57} \in \mathbb{Z}_{17}$, la classe $\bar{21}^{-1} \in \mathbb{Z}_{18}$ inversa di $\bar{21} \in \mathbb{Z}_{18}$ e la classe $\bar{57}^{-1} \in \mathbb{Z}_{18}$ inversa di $\bar{57} \in \mathbb{Z}_{18}$.

[5] Si considerino gli insiemi $\{0, 1\}$ e $\{0, 1, 2\}$ dotati dell'ordinamento standard, e nell'insieme prodotto cartesiano $\mathbb{P} := \{0, 1, 2\} \times \{0, 1\} \times \{0, 1\} \times \{0, 1\}$ si consideri la relazione d'ordine *prodotto* di quelle considerate in $\{0, 1, 2\}$ e in $\{0, 1\}$ (tre volte). Infine, nell'insieme ordinato $\mathbb{P}$ — che è un reticolo! — si consideri il sottoinsieme

$$\begin{aligned} \mathbb{E} := \{ & (0, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 1), (1, 0, 0, 1), \\ & (1, 1, 0, 1), (1, 0, 1, 1), (2, 0, 0, 1), (1, 1, 1, 1), (2, 0, 1, 1), (2, 1, 1, 1) \} \end{aligned}$$

dotato della relazione d'ordine indotta dall'insieme ordinato $\mathbb{P}$, indicata con $\preceq$. L'insieme ordinato $(\mathbb{E}; \preceq)$ risulta allora essere un reticolo.

(a) Descrivere esplicitamente il diagramma di Hasse di $(\mathbb{E}; \preceq)$.

(b) Verificare che il reticolo $(\mathbb{E}; \preceq)$ non è un sottoreticolo del reticolo $\mathbb{P}$.

(c) Determinare se il reticolo $(\mathbb{E}; \preceq)$ sia un'algebra di Boole oppure no.

(d) Determinare se il reticolo $(\mathbb{E}; \preceq)$ sia distributivo oppure no.

(e) Determinare, se possibile, una $\vee$ -fattorizzazione di $(1, 1, 1, 1)$ in atomi.

(f) Determinare, se possibile, un elemento di $(\mathbb{E}; \preceq)$ che abbia *tre* diverse $\vee$ -fattorizzazioni non ridondanti in elementi $\vee$ -irriducibili.