

ALGEBRA e LOGICA
CdL in Ingegneria Informatica
prof. Fabio GAVARINI

a.a. 2020–2021 — Sessione Estiva, I appello

Esame scritto del 16 Giugno 2021

.....

*N.B.: compilare il compito in modo sintetico ma **esauriente**, spiegando
chiaramente quanto si fa, e scrivendo in corsivo con grafia leggibile.*

..... \otimes

[1] Nell'insieme \mathbb{Z} dei numeri interi si consideri la relazione ω definita da

$$a \omega b \iff a^2 \equiv b^2 \pmod{11} \qquad \forall \ a, b \in \mathbb{Z}$$

- (a) Dimostrare che ω è una equivalenza.
- (b) Determinare il numero di ω -classi di equivalenza distinte in \mathbb{Z} .
- (c) Descrivere esplicitamente l'insieme quoziente \mathbb{Z}/ω .
- (d) Descrivere esplicitamente tutte le ω -classi di equivalenza in \mathbb{Z} .

[2] Determinare tutte le soluzioni in \mathbb{Z} dell'equazione congruenziale

$$99^{36056} x \equiv -51^{5473} \pmod{19}$$

[3] Dimostrare che per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha $\sum_{s=0}^{2n} \frac{s(s+1)}{8} = \sum_{c=0}^n c^2$.

[4] Si consideri il polinomio booleano — nelle tre variabili x, y e z — dato da

$$P(x, y, z) := \left((x' \wedge 0' \wedge z' \wedge x' \wedge y)' \wedge (z' \vee y' \vee z) \right)' \vee \\ \vee \left((y' \vee (x' \wedge (z \vee x') \wedge x) \vee x \vee z') \wedge (x \vee z' \vee x \vee 1' \vee x') \right)'$$

- (a) Determinare la *forma normale disgiuntiva* di P .
- (b) Determinare, giustificando opportunamente la risposta, se la suddetta forma normale disgiuntiva sia (anche) una *forma minimale* di P oppure no.

(continua...)

[5] Dato l'insieme $\{S, P, Q, R\}$, si consideri il corrispondente insieme delle parti $\mathcal{P}(\{S, P, Q, R\})$, dotato della relazione (d'ordine) di inclusione.

Si consideri poi in $\mathcal{P}(\{S, P, Q, R\})$ il sottoinsieme \mathbb{E} definito da

$$\begin{aligned}\mathbb{E} &:= \mathcal{P}(\{S, P, Q, R\}) \setminus \{\{Q\}, \{S, R\}, \{P, Q\}, \{P, R\}, \{S, Q, R\}, \{P, Q, R\}\} = \\ &= \{\emptyset, \{S\}, \{P\}, \{R\}, \{S, P\}, \{S, Q\}, \{Q, R\}, \\ &\quad \{S, P, Q\}, \{S, P, R\}, \{S, P, Q, R\}\}\end{aligned}$$

dotato a sua volta della relazione (d'ordine) di inclusione, per la quale è un reticolo.

(a) Disegnare il diagramma di Hasse dell'insieme ordinato $(\mathbb{E}; \subseteq)$.

(b) Verificare che $(\mathbb{E}; \subseteq)$ non è un sottoreticolo di $(\mathcal{P}(\{S, P, Q, R\}); \subseteq)$.

(c) Esiste una \vee -fattorizzazione non ridondante in *fattori* \vee -irriducibili per l'elemento $\{S, P, Q, R\}$ nel reticolo \mathbb{E} ? In caso negativo, si spieghi perché essa non esista; in caso affermativo, si determini esplicitamente una tale \vee -fattorizzazione, e se possibile se ne determini più di una.

(d) Determinare — giustificando adeguatamente la risposta — se il reticolo \mathbb{E} sia un'algebra di Boole oppure no.