

ALGEBRA e LOGICA
CdL in Ingegneria Informatica
prof. Fabio GAVARINI

Sessione Estiva Anticipata 2013–2014 / Sessione Invernale 2012–2013 — II appello
Esame scritto del 18 Febbraio 2014 — COMPITO S

.....

*N.B.: compilare il compito in modo sintetico ma **esauriente**, spiegando
chiaramente quanto si fa, e scrivendo in corsivo con grafia leggibile.*

..... §

[1] Determinare — se esistono — tutte le successioni $\underline{a} := \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tali che

$$a_3 = 0 \quad , \quad a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} \quad \forall n \geq 2$$

e tutte le successioni $\underline{b} := \{b_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tali che

$$b_1 = 3 \quad , \quad b_2 = -1 \quad , \quad b_3 = 2 \quad , \quad b_n = b_{n-1} + 2b_{n-2} \quad \forall n \geq 2 \quad .$$

[2] Dato l'anello \mathbb{Z}_{14} delle classi di congruenza modulo 14, per ogni elemento $\bar{a} \in \mathbb{Z}_{14}$ si consideri la funzione

$$\varphi_{\bar{a}} : \mathbb{Z}_{14} \longrightarrow \mathbb{Z}_{14} \quad , \quad \bar{z} \mapsto \varphi_{\bar{a}}(\bar{z}) := \bar{a} \cdot \bar{z} + \bar{3} \quad \forall \bar{z} \in \mathbb{Z}_{14}$$

- (a) Determinare tutte le classi $\bar{a} \in \mathbb{Z}_{14}$ per le quali $\varphi_{\bar{a}}$ sia suriettiva.
- (b) Determinare tutte le classi $\bar{a} \in \mathbb{Z}_{14}$ per le quali $\varphi_{\bar{a}}$ sia iniettiva.

[3] Si consideri l'insieme $E := \{3, 4, 5, 15, 25, 30, 60, 75, 90, 270\}$ e in esso la relazione d'ordine $|$ data dalla “divisibilità”, precisamente $d' | d''$ se e soltanto se d' divide d'' in \mathbb{N} .

- (a) Disegnare il *diagramma di Hasse* dell'insieme ordinato $(E; |)$.
- (b) Determinare tutti gli (eventuali) *elementi massimali* di E .
- (c) Determinare tutti gli (eventuali) *elementi minimali* di E .
- (d) Esiste un *massimo* in E ? Esiste un *minimo* in E ?
- (e) L'insieme ordinato $(E; |)$ è un reticolo? In caso affermativo, si spieghi il perché; in caso negativo, si determini il più piccolo (rispetto all'inclusione insiemistica) reticolo L che contenga E come sottoinsieme in modo che l'ordine di L ristretto ad E coincida con la relazione d'ordine $|$ già fissata in E .

[4] Per ogni $z \in \mathbb{Z}$, si indichino con $[z]_{13} \in \mathbb{Z}_{13}$ e $[z]_{12} \in \mathbb{Z}_{12}$ le sue classi di congruenza rispettivamente modulo 13 e modulo 12.

Determinare l'insieme di tutti numeri interi $z \in \mathbb{Z}$ tali che $[z]_{13}$ e $[z]_{12}$ siano soluzione rispettivamente — e simultaneamente — delle due equazioni modulari

$$[6]_{13} [x]_{13} = [5]_{13} \quad (\text{in } \mathbb{Z}_{13}) \quad \text{e} \quad [10]_{12} [x]_{12} = [4]_{12} \quad (\text{in } \mathbb{Z}_{12})$$

[5] (a) Usando la scrittura posizionale in base $b = quattro$, tramite le quattro “cifre” (in ordine crescente!) dell'insieme $\{\diamond, \clubsuit, \spadesuit, \heartsuit\}$, calcolare la somma

$$(\spadesuit \diamond \heartsuit \heartsuit \clubsuit)_b + (\spadesuit \clubsuit \spadesuit \diamond \heartsuit)_b$$

(b) Usando la scrittura posizionale in base $b = dodici$, tramite le dodici cifre (ordinate!) dell'insieme $\{0, 1, 2, 3, \dots, 8, 9, \perp, \wedge\}$, calcolare — magari senza passare per la scrittura in base dieci... — il resto di $(70\perp 31\wedge 5)_b$ nella divisione per $(\wedge)_b$.