

**ALGEBRA e LOGICA**  
**CdL in Ingegneria Informatica**  
prof. Fabio GAVARINI

*Sessione Estiva Anticipata 2013–2014 / Sessione Invernale 2012–2013 — II appello*  
Esame scritto del 18 Febbraio 2014 — COMPITO Q

.....  
*N.B.: compilare il compito in modo sintetico ma **esauriente**, spiegando  
chiaramente quanto si fa, e scrivendo in corsivo con grafia leggibile.*

.....  $\mathbb{Q}$  .....

[1] Determinare — se esistono — tutte le successioni  $\underline{a} := \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  tali che

$$a_4 = 0 \quad , \quad a_n = -a_{n-1} + 2a_{n-2} \quad \forall n \geq 2$$

e tutte le successioni  $\underline{b} := \{b_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  tali che

$$b_1 = 1 \quad , \quad b_2 = 3 \quad , \quad b_3 = 1 \quad , \quad b_n = -b_{n-1} + 2b_{n-2} \quad \forall n \geq 2 \quad .$$

[2] Dato l'anello  $\mathbb{Z}_{21}$  delle classi di congruenza modulo 21, per ogni elemento  $\bar{a} \in \mathbb{Z}_{21}$  si consideri la funzione

$$\varphi_{\bar{a}} : \mathbb{Z}_{21} \longrightarrow \mathbb{Z}_{21} \quad , \quad \bar{z} \mapsto \varphi_{\bar{a}}(\bar{z}) := \bar{a} \cdot \bar{z} + \bar{4} \quad \forall \bar{z} \in \mathbb{Z}_{21}$$

- (a) Determinare tutte le classi  $\bar{a} \in \mathbb{Z}_{21}$  per le quali  $\varphi_{\bar{a}}$  sia suriettiva.
- (b) Determinare tutte le classi  $\bar{a} \in \mathbb{Z}_{21}$  per le quali  $\varphi_{\bar{a}}$  sia iniettiva.

[3] Si consideri l'insieme  $E := \{2, 4, 5, 9, 10, 20, 30, 90, 150, 750\}$  e in esso la relazione d'ordine  $|$  data dalla “divisibilità”, precisamente  $d' | d''$  se e soltanto se  $d'$  divide  $d''$  in  $\mathbb{N}$ .

- (a) Disegnare il *diagramma di Hasse* dell'insieme ordinato  $(E; |)$ .
- (b) Determinare tutti gli (eventuali) *elementi massimali* di  $E$ .
- (c) Determinare tutti gli (eventuali) *elementi minimali* di  $E$ .
- (d) Esiste un *massimo* in  $E$ ? Esiste un *minimo* in  $E$ ?
- (e) L'insieme ordinato  $(E; |)$  è un reticolo? In caso affermativo, si spieghi il perché; in caso negativo, si determini il più piccolo (rispetto all'inclusione insiemistica) reticolo  $L$  che contenga  $E$  come sottoinsieme in modo che l'ordine di  $L$  ristretto ad  $E$  coincida con la relazione d'ordine  $|$  già fissata in  $E$ .

[4] Per ogni  $z \in \mathbb{Z}$ , si indichino con  $[z]_{11} \in \mathbb{Z}_{11}$  e  $[z]_{15} \in \mathbb{Z}_{15}$  le sue classi di congruenza rispettivamente modulo 11 e modulo 15.

Determinare l'insieme di tutti numeri interi  $z \in \mathbb{Z}$  tali che  $[z]_{15}$  e  $[z]_{11}$  siano soluzione rispettivamente — e simultaneamente — delle due equazioni modulari

$$[12]_{15} [x]_{15} = [6]_{15} \quad (\text{in } \mathbb{Z}_{15}) \quad \text{e} \quad [5]_{11} [x]_{11} = [8]_{11} \quad (\text{in } \mathbb{Z}_{11})$$

[5] (a) Usando la scrittura posizionale in base  $b = quattro$ , tramite le quattro “cifre” (in ordine crescente!) dell'insieme  $\{\diamond, \clubsuit, \spadesuit, \heartsuit\}$ , calcolare la somma

$$(\spadesuit\spadesuit\diamond\heartsuit\clubsuit)_b + (\spadesuit\diamond\heartsuit\clubsuit\clubsuit)_b$$

(b) Usando la scrittura posizionale in base  $b = dodici$ , tramite le dodici cifre (ordinate!) dell'insieme  $\{0, 1, 2, 3, \dots, 8, 9, \perp, \wedge\}$ , calcolare — magari senza passare per la scrittura in base dieci... — il resto di  $(2\wedge 36\perp 81)_b$  nella divisione per  $(\wedge)_b$ .