

ALGEBRA e LOGICA
CdL in Ingegneria Informatica
prof. Fabio GAVARINI

a.a. 2013-2014 — Sessione Estiva, II appello

Esame scritto del 16 Luglio 2014 — compito \Re

.....

*N.B.: compilare il compito in modo sintetico ma **esauriente**, spiegando
chiaramente quanto si fa, e scrivendo in corsivo con grafia leggibile.*

..... \Re

[1] Calcolare il resto r_1 nella divisione di $N_1 := 865^{70396}$ per 21 e il resto r_2 nella divisione di $N_2 := 975^{69518}$ per 14.

[2] Determinare l'insieme di tutte le soluzioni del sistema di equazioni congruenziali

$$(*) : \begin{cases} 133x \equiv 67 \pmod{9} \\ 53x \equiv -119 \pmod{4} \end{cases}$$

[3] Dimostrare per induzione i due fatti seguenti:

$$(a) \quad \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{n} \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N} \text{ con } n > 1;$$

$$(b) \quad 4^{2n+1} + 3^{n+2} \equiv 0 \pmod{13} \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}.$$

[4] Si consideri il polinomio booleano $T(x, y, z)$, nelle variabili x, y e z , dato da

$$T(x, y, z) := (y \wedge 1 \wedge z \wedge x) \vee (y \vee 0 \vee z \vee y'' \vee x)' \vee ((y \vee z') \wedge 1' \wedge x'' \wedge y) \vee \\ \vee (y' \wedge ((x \vee z) \wedge y')' \wedge z \wedge y \wedge x'') \vee ((1 \wedge y' \wedge z \wedge x')' \wedge (y \vee z' \vee 0 \vee x'))'$$

(a) Determinare la *forma normale disgiuntiva* di T .

(b) Determinare la *somma di tutti gli implicanti primi* di T .

(c) Determinare una *forma minimale* di T .

(continua...)

[5] (a) Determinare, se esistono, tutte le successioni reali $\underline{a} := \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tali che

$$a_0 = -1 \quad , \quad a_1 = 3 \quad , \quad a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2} \quad \forall n \geq 2 \quad .$$

(b) Determinare, se esistono, tutte le successioni reali $\underline{b} := \{b_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tali che

$$b_0 = 2 \quad , \quad b_1 = 3 \quad , \quad b_2 = 0 \quad , \quad b_n = 6b_{n-1} - 9b_{n-2} \quad \forall n \geq 2 \quad .$$

— ★ —

SOLUZIONI

[1] $r_1 = 4 \quad , \quad r_2 = 11 \quad .$

[2] $x \equiv 25 \pmod{36}$, o in altri termini $x = 25 + 36z$, $\forall z \in \mathbb{Z}$.

[3] N.B.: ricordo che la notazione $\prod_{h=1}^s F_s$ significa semplicemente questo:

$$\prod_{t=2}^s F_t := F_2 \cdot F_3 \cdot F_4 \cdots F_{s-1} \cdot F_s$$

(a) *Base dell'induzione*: $n = 2$, per cui bisogna dimostrare che

$$\left(\prod_{k=2}^2 \left(1 - \frac{1}{k}\right) \right) \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

La verifica diretta dà $\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{2-1}{2} = \frac{1}{2}$, e così la base dell'induzione è verificata.

Passo induttivo: bisogna dimostrare che, preso un qualunque valore di n , SE (*Ipotesi Induttiva*) la proprietà che ci interessa è vera per n , ALLORA è vera anche (*Tesi Induttiva*) per $n+1$. Nel caso in esame, bisogna dimostrare che SE $\prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{n}$ ALLORA è anche $\prod_{k=2}^{n+1} \left(1 - \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{n+1}$. La verifica diretta dà

$$\begin{aligned} \prod_{k=2}^{n+1} \left(1 - \frac{1}{k}\right) &= \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{n} \cdot \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \\ &= \frac{1}{n} \cdot \frac{(n+1)-1}{n+1} = \frac{1}{n} \cdot \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

(b) *Base dell'induzione*: $n = 0$, per cui bisogna dimostrare che $4^{2 \cdot 0 + 1} + 3^{0 + 2} \equiv 0 \pmod{13}$

La verifica diretta dà $4^{2 \cdot 0 + 1} + 3^{0 + 2} = 4 + 9 = 13 \equiv 0 \pmod{13}$, e così la base dell'induzione è verificata.

Passo induttivo: bisogna dimostrare che, preso un qualunque valore di n , SE $4^{2 \cdot n + 1} + 3^{n + 2} \equiv 0 \pmod{13}$ ALLORA è $4^{2 \cdot (n+1) + 1} + 3^{(n+1) + 2} \equiv 0 \pmod{13}$. La verifica diretta dà

$$\begin{aligned} 4^{2 \cdot (n+1) + 1} + 3^{(n+1) + 2} &= 4^{2 \cdot n + 2 + 1} + 3^{n + 1 + 2} = 4^{2 \cdot n + 1} \cdot 4^2 + 3^{n + 2} \cdot 3^1 = \\ &= 4^{2 \cdot n + 1} \cdot 16 + 3^{n + 2} \cdot 3 = 4^{2 \cdot n + 1} \cdot (3 + 13) + 3^{n + 2} \cdot 3 = \\ &= (4^{2 \cdot n + 1} + 3^{n + 2}) \cdot 3 + 4^{2 \cdot n + 1} \cdot 13 \equiv 0 \cdot 3 + 4^{2 \cdot n + 1} \cdot 0 \pmod{13} \equiv 0 \pmod{13} \end{aligned}$$

$$[4] \quad (a) \quad F.N.D. = (x \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge y' \wedge z) \vee (x' \wedge y' \wedge z) \vee (x' \wedge y' \wedge z')$$

$$(b) \quad s.t.i.p. = (x \wedge z) \vee (x' \wedge y') \vee (y' \wedge z)$$

$$(c) \quad f.m. = (x \wedge z) \vee (x' \wedge y'), \quad \text{e questa è l'unica forma minimale possibile.}$$

[5] (a) Esiste una e una sola $\underline{a} := \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ del tipo richiesto, data dalla formula $a_n = (2n - 1) \cdot 3^n, \forall n \in \mathbb{N}$.

(b) Esiste una e una sola $\underline{b} := \{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ del tipo richiesto, data dalla formula $b_n = (2 - n) \cdot 3^n, \forall n \in \mathbb{N}$.
