

ALGEBRA e LOGICA

CdL in Ingegneria Informatica — a.a. 2012/2013

prof. Fabio GAVARINI

Sessione Estiva Anticipata - I sessione / II appello

Esame scritto del 14 Febbraio 2013 — COMPITO Q

.....
N.B.: compilare il compito in modo sintetico ma esauriente, spiegando chiaramente quanto si fa, e scrivendo in corsivo con grafia leggibile.

..... **Q**

[1] (a) Calcolare — se esiste — la classe $\bar{z}^{-1} \in \mathbb{Z}_{100}$ inversa della classe $\bar{z} \in \mathbb{Z}_{100}$ per i casi $z := 65$ e $z := -137$.

(b) Risolvere l'equazione $\overline{237} \cdot \bar{x} = \overline{181}$ in \mathbb{Z}_{100} .

(c) Risolvere l'equazione congruenziale $363 \cdot x \equiv 219 \pmod{100}$ in \mathbb{Z} .

[2] Si consideri il reticolo D_n dei divisori di n per i due valori $n := 350$ e $n := 385$.

(a) Determinare tutti gli atomi e tutti gli elementi \vee -irriducibili di D_{350} e di D_{385} .

(b) Determinare una \vee -fattorizzazione non ridondante in fattori \vee -irriducibili degli elementi $b := 50 \in D_{350}$, $d := 35 \in D_{385}$ e $q := 77 \in D_{385}$, se possibile; se invece non fosse possibile, se ne spieghi il perché.

(c) D_{350} è un'algebra di Boole? D_{385} è un'algebra di Boole? (*N.B.: spiegare!*)

(d) In ciascuno dei due casi $n := 350$ e $n := 385$ esiste un insieme X tale che D_n sia isomorfo (come reticolo) a $\mathcal{P}(X)$? In caso negativo, spiegare il perché; in caso affermativo, calcolare un isomorfismo esplicito (da D_n a $\mathcal{P}(X)$ o viceversa).

[3] Calcolare — se esistono — tutte le successioni $\underline{a} := \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ per le quali

$$a_0 = 1 \quad , \quad a_1 = -2 \quad , \quad a_n = -4a_{n-1} - 4a_{n-2} \quad \forall n \geq 2 \quad .$$

[4] Determinare tutte le soluzioni del sistema di equazioni congruenziali

$$\begin{cases} -239x \equiv 170 \pmod{6} \\ 142x \equiv 251 \pmod{7} \end{cases}$$

[5] Per $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ sia $\lceil r \rceil := \min \{ n \in \mathbb{N} \mid r \leq n \}$ l'“arrotondamento superiore” di r . Sia \triangleleft la relazione (in $\mathbb{R}_{\geq 0}$) $r_1 \triangleleft r_2 \iff \lceil r_1 \rceil \leq \lceil r_2 \rceil$, per ogni $r_1, r_2 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Si dimostri che:

(a) la relazione \triangleleft è riflessiva e transitiva;

(b) la relazione \triangleleft non è antisimmetrica;

(c) esiste un $r_{\downarrow} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ tale che $r_{\downarrow} \triangleleft x$ per ogni $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$;

(d) non esiste un $r^{\uparrow} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ tale che $r \triangleleft r^{\uparrow}$ per ogni $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$;

(e) la relazione \rightleftharpoons in $\mathbb{R}_{\geq 0}$ definita da $r_1 \rightleftharpoons r_2 \iff (r_1 \triangleleft r_2) \wedge (r_2 \triangleleft r_1)$ è un'equivalenza.
