ALGEBRA e LOGICA

CdL in Ingegneria Informatica — a.a. 2012/2013

prof. Fabio GAVARINI

Sessione Autunnale — 2º Appello

Esame scritto del 13 Settembre 2013

. . . .

N.B.: compilare il compito in modo sintetico ma **esauriente***, spiegando chiaramente quanto si fa, e scrivendo in corsivo con grafia leggibile.*

. . . . $*$ . . . .

[1] Si consideri il polinomio booleano — nelle tre variabili x, y e z — dato da

$$P(x,y,z) \ := \ \Big((z \vee y) \wedge \big(x' \vee z \vee x' \big) \Big)' \vee \Big((y' \wedge z)' \wedge \big(y' \vee x' \vee z \big) \Big)'$$

(a) Calcolare la *forma normale disgiuntiva* di P.

(b) Calcolare una *forma minimale* di P.

(c) Calcolare — magari, ma non necessariamente, sfruttando i risultati ottenuti in *(a)* e/o in *(b)* — una *forma minimale* del polinomio Q dato da

$$Q \ := \ (z \wedge x)' \vee P \vee \big(y' \wedge x \big)$$

[2] Calcolare — se esistono — tutte le successioni $\underline{a} := \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ per le quali

$$a_0 = 1 \quad , \quad a_1 = -2 \quad , \qquad a_n = -4\, a_{n-1} - 4\, a_{n-2} \qquad \forall \ n \geq 2 \quad .$$

[3] *(a)* Calcolare — se esiste — la classe $\overline{z}^{-1} \in \mathbb{Z}_{100}$ inversa della classe $\overline{z} \in \mathbb{Z}_{100}$ per i casi $z := 65$ e $z := -137$.

(b) Risolvere l'equazione $\overline{237} \cdot \overline{x} = \overline{181}$ in $\mathbb{Z}_{100}$.

(c) Risolvere l'equazione congruenziale $363 \cdot x \equiv 219 \ (\mathrm{mod}\ 100)$ in $\mathbb{Z}$.

[4] Sia $\asymp$ la relazione in $\mathbb{Q}$ definita da

$$\ell \asymp m \iff \ell^2 - m^2 = 3\,(m - \ell) \qquad \text{per ogni } \ell, m \in \mathbb{Q}.$$

(a) Si dimostri che la relazione $\asymp$ è una equivalenza in $\mathbb{Q}$.

(b) Si calcolino esplicitamente le classi di $\asymp$–equivalenza $[-1]_{\asymp}$, $[0]_{\asymp}$ e $[+1]_{\asymp}$ rispettivamente di -1, di 0 e di $+1$.

(c) Si dimostri che esiste uno ed un solo $q_0 \in \mathbb{Q}$ tale che $[q_0]_{\asymp} = \{q_0\}$, e se ne calcoli esplicitamente il valore.

[5] Determinare tutte le soluzioni del sistema di equazioni congruenziali

$$\begin{cases} -239\,x \equiv 170 \quad (\mathrm{mod}\ 6) \\ \ \ 142\,x \equiv 251 \quad (\mathrm{mod}\ 7) \end{cases}$$