ALGEBRA e LOGICA

CdL in Ingegneria Informatica

prof. Fabio GAVARINI

a.a. 2016–2017 — Sessione Autunnale, I appello

Esame scritto del 5 Settembre 2017

. . . .

N.B.: compilare il compito in modo <u>*sintetico*</u> *ma* **esauriente**, *spiegando chiaramente quanto si fa, e scrivendo in* corsivo *con grafia leggibile.*

. . . . * . . . .

[1] Si consideri il polinomio booleano (nelle quattro variabili a, c, e, s) dato da

$$P(a,c,e,s) \;:=\; \Big((e'' \vee 0 \vee s) \wedge (c \wedge a) \Big) \vee \big((s \vee c)' \wedge a \big)'' \vee \\ \vee \Big((e' \vee s)' \wedge (c \vee 1' \vee c'') \Big)$$

(a) Determinare la *forma normale disgiuntiva* di P.

(b) Determinare la *somma di tutti gli implicanti primi* di P.

(c) Determinare una *forma minimale* di P.

[2] *(a)* Determinare se esistano le classi inverse $\overline{9}^{\,-1}$, $\overline{5}^{\,-1}$, $\overline{7}^{\,-1}$, $\big(\overline{9}\cdot\overline{7}\big)^{-1}$ e $\big(\overline{5}\cdot\overline{7}\big)^{-1}$ nell'anello $\mathbb{Z}_{20}$ degli interi modulo 20. In caso negativo, si spieghi perché tale classe inversa non esista; in caso affermativo, si calcoli esplicitamente la suddetta classe inversa.

(b) Calcolare tutte le soluzioni dell'equazione modulare $\overline{647}\,\overline{x} = \overline{-516}$ nell'anello $\mathbb{Z}_{20}$ delle classi resto modulo 20;

(c) Calcolare tutte le soluzioni dell'equazione congruenziale $436\,x \equiv 92 \pmod{20}$ nell'anello $\mathbb{Z}$ dei numeri interi.

[3] *(a)* Scrivere in base $b' :=$ DUE il numero L che in base $b :=$ OTTO è espresso dalla scrittura posizionale $L := \big(5034\big)_b$.

(b) Scrivere in base $b'' :=$ QUATTRO il numero M che in base $b' :=$ DUE è espresso dalla scrittura posizionale $M := \big(110001101\big)_{b'}$.

(c) Utilizzando la notazione posizionale in base $\beta :=$ CINQUE, calcolare la somma $A+B$ dove A e B sono i due numeri naturali espressi in base β da

$$A := \big(31042\big)_\beta \qquad \text{e} \qquad B := \big(24304\big)_\beta$$

esprimendo a sua volta la suddetta somma con la scrittura posizionale in base $\beta :=$ CINQUE.

(continua...)

[4] Dimostrare che per ogni $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$ si ha $\displaystyle\sum_{s=2}^{n} \frac{1}{s\,(s-1)} = \frac{n-1}{n}$.

[5] Si considerino gli insiemi delle parti $\mathcal{P}\big(\{\heartsuit, \spadesuit, \clubsuit\}\big)$ e $\mathcal{P}\big(\{\spadesuit, \clubsuit, \diamondsuit\}\big)$ rispettivamente dell'insieme $\{\heartsuit, \spadesuit, \clubsuit\}$ e dell'insieme $\{\spadesuit, \clubsuit, \diamondsuit\}$. Si considerino poi la funzione

$$f : \mathcal{P}\big(\{\heartsuit, \spadesuit, \clubsuit\}\big) \longrightarrow \mathcal{P}\big(\{\spadesuit, \clubsuit, \diamondsuit\}\big) \quad , \qquad X \mapsto f(X) := X \cap \{\spadesuit, \clubsuit, \diamondsuit\}$$

— per ogni $X \in \mathcal{P}\big(\{\heartsuit, \spadesuit, \clubsuit\}\big)$ — e la relazione ρ_f in $\mathcal{P}\big(\{\heartsuit, \spadesuit, \clubsuit\}\big)$ definita da

$$X' \rho_f X'' \iff f\big(X'\big) = f\big(X''\big) \qquad \forall\ X', X'' \in \mathcal{P}\big(\{\heartsuit, \spadesuit, \clubsuit\}\big)$$

(a) Verificare se la funzione f è *iniettiva* oppure no.

(b) Verificare se la funzione f è *suriettiva* oppure no.

(c) Dimostrare che la relazione ρ_f è *di equivalenza*.

(d) Dimostrare che la relazione ρ_f *non è d'ordine*.

(e) Descrivere esplicitamente tutte le classi di ρ_f–equivalenza.