

# ALGEBRA e LOGICA

CdL in Ingegneria Informatica — a.a. 2012/2013

prof. Fabio GAVARINI

Sessione Autunnale — 1° Appello

Esame scritto del 5 Settembre 2013

.....  
*N.B.: compilare il compito in modo sintetico ma esauriente, spiegando chiaramente quanto si fa, e scrivendo in corsivo con grafia leggibile.*

..... \* .....

[1] Si consideri il reticolo  $D_n$  dei divisori di  $n$  per i due valori  $n := 315$  e  $n := 165$ .

(a) Determinare tutti gli atomi e tutti gli elementi  $\vee$ -irriducibili di  $D_{315}$  e di  $D_{165}$ .

(b) Determinare una  $\vee$ -fattorizzazione non ridondante in fattori  $\vee$ -irriducibili degli elementi  $b := 45 \in D_{315}$ ,  $d := 55 \in D_{165}$  e  $q := 15 \in D_{165}$ , se possibile; se invece non fosse possibile, se ne spieghi il perché.

(c)  $D_{315}$  è un'algebra di Boole?  $D_{165}$  è un'algebra di Boole? (*N.B.: spiegare!*)

[2] Per  $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  sia  $\lfloor x \rfloor := \max \{ n \in \mathbb{N} \mid n \leq x \}$  l'“arrotondamento inferiore” di  $x$ . Sia  $\dashv$  la relazione (in  $\mathbb{R}_{\geq 0}$ )  $x' \dashv x'' \iff \lfloor x' \rfloor \leq \lfloor x'' \rfloor$ , per ogni  $x', x'' \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ . Si dimostri che:

(a) la relazione  $\dashv$  non è simmetrica né antisimmetrica;

(b) la relazione  $\dashv$  è riflessiva e transitiva;

(c) non esiste un  $x_+ \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  tale che  $x \dashv x_+$  per ogni  $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ ;

(d) esiste almeno un elemento  $x_- \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  tale che  $x_- \dashv x$  per ogni  $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ .

[3] Calcolare — se esistono — tutte le successioni  $\underline{a} := \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  per le quali

$$a_0 = -2, \quad a_1 = 1, \quad a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2} \quad \forall n \geq 2.$$

[4] (a) Calcolare — se esiste — la classe  $\bar{z}^{-1} \in \mathbb{Z}_{100}$  inversa della classe  $\bar{z} \in \mathbb{Z}_{100}$  per i casi  $z := 242$  e  $z := 27$ .

(b) Risolvere l'equazione  $\overline{-427} \cdot \bar{x} = \overline{213}$  in  $\mathbb{Z}_{100}$ .

(c) Risolvere l'equazione congruenziale  $373 \cdot x \equiv 87 \pmod{100}$  in  $\mathbb{Z}$ .

[5] Determinare tutte le soluzioni del sistema di equazioni congruenziali

$$\begin{cases} 188x \equiv 271 \pmod{7} \\ 223x \equiv -311 \pmod{8} \end{cases}$$

