ALGEBRA e LOGICA

CdL in Ingegneria Informatica — a.a. 2012/2013

prof. Fabio GAVARINI

Sessione Estiva — Primo appello

Esame scritto del 5 Luglio 2013

. . . .

N.B.: compilare il compito in modo sintetico *ma* **esauriente**, *spiegando chiaramente quanto si fa, e scrivendo in* corsivo *con grafia leggibile.*

. . . . ∗ . . . .

[1] Calcolare — se esistono — tutte le successioni $\underline{a} := \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ per le quali

$$a_0 = 1 \quad , \quad a_1 = -1 \quad , \qquad a_n = 6\,a_{n-1} - 9\,a_{n-2} \qquad \forall\; n \geq 2 \quad .$$

[2] *(a)* Negli anelli $\mathbb{Z}_{14}$ e $\mathbb{Z}_{15}$, calcolare i rispettivi gruppi di elementi invertibili

$$U(\mathbb{Z}_{14}) := \left\{ \overline{z} \in \mathbb{Z}_{14} \,\middle|\, \exists\, \overline{z}^{-1} \in \mathbb{Z}_{14} : \overline{z} \cdot \overline{z}^{-1} = \overline{1} \right\}$$
$$U(\mathbb{Z}_{15}) := \left\{ \overline{z} \in \mathbb{Z}_{15} \,\middle|\, \exists\, \overline{z}^{-1} \in \mathbb{Z}_{15} : \overline{z} \cdot \overline{z}^{-1} = \overline{1} \right\}$$

(b) Determinare — se esiste — la classe $\overline{23}^{\,-1} \in \mathbb{Z}_{31}$ inversa della classe $\overline{23} \in \mathbb{Z}_{31}$ e la classe $\overline{24}^{\,-1} \in \mathbb{Z}_{32}$ inversa della classe $\overline{24} \in \mathbb{Z}_{32}$.

(c) Risolvere, se possibile, l'equazione $\overline{-23} \cdot \overline{x} = \overline{12}$ in $\mathbb{Z}_{31}$.

[3] Si consideri il reticolo D_n dei divisori di n per i due valori $n := 315$ e $n := 165$.

(a) Determinare tutti gli atomi e tutti gli elementi $\vee$–irriducibili di D_{315} e di D_{165} .

(b) Determinare una $\vee$–fattorizzazione non ridondante in fattori $\vee$–irriducibili degli elementi $b := 45 \in D_{315}$, $d := 55 \in D_{165}$ e $q := 15 \in D_{165}$, se possibile; se invece non fosse possibile, se ne spieghi il perché.

(c) Stabilire, motivando le conclusioni, se D_{315} e/o D_{165} sia un'algebra di Boole.

[4] Determinare tutte le soluzioni del sistema di equazioni congruenziali

$$\begin{cases} 195\,x \equiv 292 \pmod{7} \\ -215\,x \equiv 327 \pmod{8} \end{cases}$$

[5] Per $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ siano $\lfloor r \rfloor := \max\left\{ m \in \mathbb{N} \,\middle|\, m \leq r \right\}$ e $\lceil r \rceil := \min\left\{ n \in \mathbb{N} \,\middle|\, r \leq n \right\}$ rispettivamente l'"arrotondamento inferiore" e l'"arrotondamento superiore" di r .

Siano $\leftharpoondown$ e $\rightharpoonup$ le due relazioni (in $\mathbb{R}_{\geq 0}$) $x \leftharpoondown y \iff \lfloor x \rfloor \geq \lfloor y \rfloor$ e $x \rightharpoonup y \iff \lceil x \rceil \leq \lceil y \rceil$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Si dimostri che:

(a) le due relazioni $\leftharpoondown$ e $\rightharpoonup$ sono riflessive e transitive;

(b) le due relazioni $\leftharpoondown$ e $\rightharpoonup$ non sono né simmetriche né antisimmetriche;

(c) esistono infiniti $\hat{y} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ tali che $x \leftharpoondown \hat{y}$ per ogni $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$;

(d) esiste uno ed un solo $\check{x} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ tale che $\check{x} \rightharpoonup y$ per ogni $y \in \mathbb{R}_{\geq 0}$;

(e) la relazione $\rightleftharpoons$ in $\mathbb{R}_{\geq 0}$ definita da $x \rightleftharpoons y \iff (x \leftharpoondown y) \wedge (x \rightharpoonup y)$ è un'equivalenza.