ALGEBRA e LOGICA
CdL in Ingegneria Informatica
prof. Fabio GAVARINI

Sessione Autunnale 2014–2015 — I appello
Esame scritto del 4 Settembre 2015

. . . .

N.B.: compilare il compito in modo <u>*sintetico*</u> *ma* **esauriente**, *spiegando chiaramente quanto si fa, e scrivendo in* corsivo *con grafia leggibile.*

. . . . ⋆ . . . .

[1] Determinare tutti i valori di $x \in \mathbb{Z}$ che siano soluzioni *simultaneamente* delle due equazioni modulari seguenti:

$$\circledast \, : \, \begin{cases} [39]_7 \cdot [x]_7 \; = \; -[15]_7 & \text{in } \mathbb{Z}_7 \\ [-13]_{11} \cdot [x]_{11} \; = \; [56]_{11} & \text{in } \mathbb{Z}_{11} \end{cases}$$

[2] *(a)* Determinare — se esistono — tutte le successioni $\underline{a} := \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ tali che

$$a_0 = -1 \quad , \quad a_1 = 5 \quad , \qquad a_n = -10\,a_{n-1} - 25\,a_{n-2} \qquad \forall \; n \geq 2 \quad .$$

(b) Sia $\underline{b} := \{b_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ una successione di numeri razionali tale che

$$b_2 = 1 \quad , \quad b_3 = -3 \quad , \qquad b_n = -10\,b_{n-1} - 25\,b_{n-2} \qquad \forall \; n \geq 2 \quad .$$

Calcolare il valore di b_5 .

[3] Determinare — se esiste — un numero intero $z \in \mathbb{Z}$ tale che

$$31 \leq z \leq 50 \qquad \text{e} \qquad z \equiv N \mod 20$$

dove N è il numero intero $N := 837^{65084}$. Se invece un tale numero z non esiste, se ne spieghi la ragione.

(continua...)

[4] Si considerino i polinomi booleani $p(x,y,z)$ ed $q(x,y,z)$, nelle variabili x, y e z, dati dalle espressioni

$$p(x,y,z) \;:=\; \Big(\big(\,z' \wedge 1 \wedge x'\,\big)' \vee y'\Big)' \;\vee\; \Big(\Big(\big(y' \wedge z\big) \vee \big(\,z \wedge 1 \wedge x'\,\big)\Big) \wedge \big(\,z' \vee y\,\big)'\Big)$$

$$q(x,y,z) \;:=\; \big(z' \vee 1' \vee y\big)' \vee \Big(\Big(z \wedge \big(x' \vee y\big)' \wedge y'\Big)' \wedge \big(\big(z'' \vee x\big) \vee y'\,\big)\Big)'$$

(a) Dimostrare che $p \sim q$, cioè i due polinomi sono *equivalenti.*

(b) Determinare la *forma normale disgiuntiva* del polinomio p e quella del polinomio q.

(c) Determinare una *forma minimale* del polinomio p e una del polinomio q.

[5] Si considerino gli insiemi $E := \{\,2\,,4\,,5\,,6\,,10\,,60\,,180\,\}$ e $E^* := E \setminus \{5\}$. Si consideri in E la relazione (d'ordine) di *divisibilità*, indicata con δ, e in E^* la relazione indotta, indicata ancora con δ, così che $(E\,;\delta)$ e $(E^*\,;\delta)$ sono insiemi ordinati.

Per entrambi i casi $X := E$ e $X := E^*$, si risponda alle seguenti domande:

(a) Disegnare il diagramma di Hasse dell'insieme ordinato $(X;\delta)$.

(b) $(X;\delta)$ è *totalmente* ordinato? Perché?

(c) $(X;\delta)$ è un *reticolo*? Perché? *In caso affermativo*, il reticolo in esame è un'*algebra di Boole*? È un reticolo *distributivo*?

(d) Quali sono — se esistono — gli elementi *massimali* in $(X;\delta)$?

(e) Quali sono — se esistono — gli elementi *minimali* in $(X;\delta)$?

(f) Esiste un *massimo* in $(X;\delta)$? Se sì, qual è? Se no, perché non esiste?

(g) Esiste un *minimo* in $(X;\delta)$? Se sì, qual è? Se no, perché non esiste?