ALGEBRA e LOGICA
CdL in Ingegneria Informatica

prof. Fabio GAVARINI

a.a. 2013–2014 — Sessione Estiva, I appello

Esame scritto del 4 Luglio 2014

. . . .

N.B.: compilare il compito in modo sintetico ma **esauriente**, *spiegando chiaramente quanto si fa, e scrivendo in corsivo con grafia leggibile.*

. . . . ⋆ . . . .

[1] Determinare l'insieme di tutte le soluzioni del sistema di equazioni congruenziali

$$\circledast \; : \; \begin{cases} 118\,x \;\equiv\; -71 \quad (\bmod 5) \\ \;\;47\,x \;\equiv\; 129 \quad (\bmod 7) \end{cases}$$

[2] *(a)* Determinare — se esistono — tutte le successioni reali $\underline{a} := \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tali che

$$a_0 \,=\, -7 \quad , \quad a_2 \,=\, 9 \quad , \qquad a_n \,=\, -6\,a_{n-1} - 9\,a_{n-2} \qquad \forall\; n \geq 2$$

(b) Dimostrare che esiste esattamente una e una sola successione reale $\underline{b} := \{b_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tale che

$$b_0 \,=\, 0 \quad , \quad b_1 \,=\, 0 \quad , \qquad b_n \,=\, 3\,b_{n-1} + 4\,b_{n-2} \qquad \forall\; n \geq 2 \quad ,$$

e precisamente questa è la successione (costante) nulla $b_n = 0 \;\; \big(\forall\, n \in \mathbb{N}\big)$.

[3] Si consideri il polinomio booleano, nelle tre variabili d, ℓ e t, dato da

$$Q(d,\ell,t) \;:=\; \big(\ell' \vee 0 \vee d'\big)' \vee \Big(\big(\ell'' \wedge d \wedge 1\big)' \wedge \big(t \vee \big(d' \vee \ell\big)' \vee t''\big)\Big)' \vee \\ \vee \big(0 \wedge t' \wedge d\big) \vee \Big(\ell' \wedge \big(d' \vee t'\big) \wedge \big(\ell'' \wedge \big(t' \vee \ell\big)\big)\Big)''$$

(a) Scrivere Q come *somma di prodotti.*

(b) Determinare la *forma normale disgiuntiva* di Q .

(c) Determinare la *somma di tutti gli implicanti primi* di Q .

(d) Determinare una *forma minimale* di Q .

(e) – [facoltativo] Scrivere Q come *prodotto di somme.*

(continua...)

[4] *(a)* Scrivere in base $b' := 3$ il numero N che in base $b := 9$ è espresso dalla scrittura posizionale $N := \big(83106\big)_9$.

(b) Scrivere in base $b := 9$ il numero T che in base $b' := 3$ è espresso dalla scrittura posizionale $T := \big(120211012\big)_3$.

[5] Per ciascuno dei due valori $n = 23$ e $n = 10$ si consideri il rispettivo anello $\mathbb{Z}_n$ delle classi resto dei numeri interi modulo n .

(a) Calcolare i due gruppi degli elementi invertibili

$$U(\mathbb{Z}_{23}) \;:=\; \big\{\, \overline{z} \in \mathbb{Z}_{23} \,\big|\, \exists\, \overline{z}^{\,-1} \in \mathbb{Z}_{23} : \overline{z} \cdot \overline{z}^{\,-1} = \overline{1} \,\big\}$$
$$U(\mathbb{Z}_{10}) \;:=\; \big\{\, \overline{z} \in \mathbb{Z}_{10} \,\big|\, \exists\, \overline{z}^{\,-1} \in \mathbb{Z}_{10} : \overline{z} \cdot \overline{z}^{\,-1} = \overline{1} \,\big\}$$

(b) Risolvere, se possibile, ciascuna delle tre equazioni seguenti:

$\overline{6} \cdot \overline{x} = \overline{28}$ in $\mathbb{Z}_{10}$, $\quad \overline{6} \cdot \overline{x} = \overline{13}$ in $\mathbb{Z}_{10}$, $\quad \overline{45} \cdot \overline{x} = \overline{6}$ in $\mathbb{Z}_{23}$.

(c) Determinare — se esiste — la classe $\overline{6}^{\,-1} \in \mathbb{Z}_{23}$ inversa della classe $\overline{6} \in \mathbb{Z}_{23}$, la classe $\overline{6}^{\,-1} \in \mathbb{Z}_{10}$ inversa di $\overline{6} \in \mathbb{Z}_{10}$ e la classe $\overline{7}^{\,-1} \in \mathbb{Z}_{10}$ inversa di $\overline{7} \in \mathbb{Z}_{10}$.

— ⋆ —

SOLUZIONI

[1] — $\quad x \equiv 23 \equiv -12 \pmod{35}$, o in altri termini $x = 23 + 35\,z$, $\forall\, z \in \mathbb{Z}$.

[2] — *(a)* Esiste una e una sola $\underline{a} := \big\{a_n\big\}_{n\in\mathbb{N}}$ del tipo richiesto, data dalla formula $a_n = (4n-7)\cdot(-3)^n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

(b) Ogni successione $\underline{b} := \big\{b_n\big\}_{n\in\mathbb{N}}$ per essere ricorsiva nel modo richiesto deve essere della forma $b_n = c_1 \cdot 4^n + c_2 \cdot (-1)^n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$; poi imponendo che sia anche $b_0 = 0$ e $b_1 = 0$ si trova che dev'essere $c_1 = 0 = c_2$, e quindi $b_n = 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

In alternativa, si può dimostrare per induzione (forte) che ogni successione $\underline{b}$ del tipo richiesto coincide necessariamente con la successione (costante) nulla.

[3] — *(a)* Ad esempio $Q \sim (\,d \wedge \ell\,) \vee \big(d' \wedge t'\big) \vee \big(\ell \wedge t'\big)$, ma non è l'unica possibilità, ovviamente.

(b) $\;$ *F.N.D.* $= (\,d \wedge \ell \wedge t\,) \vee \big(d \wedge \ell \wedge t'\big) \vee \big(d' \wedge \ell \wedge t'\big) \vee \big(d' \wedge \ell' \wedge t'\big)$

(c) $\;$ *s.t.i.p.* $= (\,d \wedge \ell\,) \vee \big(d' \wedge t'\big) \vee \big(\ell \wedge t'\big)$

(d) $\;$ *f.m.* $= (\,d \wedge \ell\,) \vee \big(d' \wedge t'\big)$, e questa è *l'unica* forma minimale possibile.

(e) Ad esempio $Q \sim \big(d \vee t'\big) \wedge \big(d' \vee \ell\big) \wedge \big(\ell \vee t'\big)$, ma non è l'unica possibilità, ovviamente; questa si calcola da *(a)* usando la distributività di $\vee$ rispetto a $\wedge$.

[4] — *(a)* $N = \big(2210010020\big)_3$; *(b)* $T = \big(16735\big)_9$

[5] — *(a)* $U(\mathbb{Z}_{23}) = \big\{\,\overline{1}\,,\,\overline{2}\,,\,\overline{3}\,,\,\dots\,,\overline{21}\,,\,\overline{22}\,\big\}$, $U(\mathbb{Z}_{10}) = \big\{\,\overline{1}\,,\,\overline{3}\,,\,\overline{7}\,,\overline{9}\,\big\}$

(b) $\overline{x} \in \big\{\,\overline{3}+\overline{5}\cdot\overline{k}\;\big|\;\overline{k}\in\mathbb{Z}_{10}\,\big\} = \big\{\,\overline{3}\,,\,\overline{8}\,\big\} \subseteq \mathbb{Z}_{10}$, $\nexists\,\overline{x}\in\mathbb{Z}_{10}$, $\overline{x}=\overline{17}\in\mathbb{Z}_{23}$.

(c) $\overline{6}^{\,-1} = \overline{4} \in \mathbb{Z}_{23}$, $\nexists\;\overline{6}^{\,-1}\in\mathbb{Z}_{10}$, $\overline{7}^{\,-1} = \overline{3} \in \mathbb{Z}_{10}$.