ALGEBRA e LOGICA
CdL in Ingegneria Informatica

prof. Fabio GAVARINI

Sessione Estiva 2014–2015 — I appello

Esame scritto del 3 Luglio 2015

. . . .

N.B.: compilare il compito in modo sintetico ma **esauriente**, *spiegando chiaramente quanto si fa, e scrivendo in corsivo con grafia leggibile.*

. . . . ⋆ . . . .

[1] Si considerino i numeri naturali N ed M che in base $b :=$ CINQUE sono espresso dalla scrittura posizionale rispettivamente nella forma $N := \big(34321\big)_b$ e $M := \big(20431\big)_b$.

Calcolare la somma $N + M$ esprimendola con la scrittura posizionale sia in base $b :=$ CINQUE che in base $b' :=$ DIECI .

[2] Per ciascuno dei due valori $n = 17$ e $n = 18$ si consideri il rispettivo anello $\mathbb{Z}_n$ delle classi resto dei numeri interi modulo n .

(a) Calcolare i due gruppi degli elementi invertibili

$$U(\mathbb{Z}_{17}) \;:=\; \big\{\, \overline{z} \in \mathbb{Z}_{17} \,\big|\, \exists\, \overline{z}^{\,-1} \in \mathbb{Z}_{17} : \overline{z} \cdot \overline{z}^{\,-1} = \overline{1} \,\big\}$$
$$U(\mathbb{Z}_{18}) \;:=\; \big\{\, \overline{z} \in \mathbb{Z}_{18} \,\big|\, \exists\, \overline{z}^{\,-1} \in \mathbb{Z}_{18} : \overline{z} \cdot \overline{z}^{\,-1} = \overline{1} \,\big\}$$

(b) Risolvere, se possibile, ciascuna delle tre equazioni seguenti:

$$\overline{40} \cdot \overline{x} = -\overline{4} \;\text{ in }\; \mathbb{Z}_{17} \;, \qquad \overline{40} \cdot \overline{x} = -\overline{13} \;\text{ in }\; \mathbb{Z}_{18} \;, \qquad \overline{25} \cdot \overline{x} = \overline{6} \;\text{ in }\; \mathbb{Z}_{18} \;.$$

(c) Determinare — se esiste — la classe $\overline{40}^{\,-1} \in \mathbb{Z}_{17}$ inversa della classe $\overline{40} \in \mathbb{Z}_{17}$, la classe $\overline{40}^{\,-1} \in \mathbb{Z}_{18}$ inversa di $\overline{40} \in \mathbb{Z}_{18}$ e la classe $\overline{35}^{\,-1} \in \mathbb{Z}_{18}$ inversa di $\overline{35} \in \mathbb{Z}_{18}$.

[3] *(a)* Determinare — se esistono — tutte le successioni $\underline{a} := \big\{a_n\big\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ tali che

$$a_0 \,=\, 7 \quad , \quad a_1 \,=\, 0 \quad , \qquad 3\,a_n \,-\, 5\,a_{n-1} - 2\,a_{n-2} \,=\, 0 \qquad \forall\; n \geq 2 \quad .$$

(b) Data la successiona $\underline{b} := \big\{b_n\big\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ definita da $b_n \,:=\, 9 \cdot (-3)^{-n} \,-\, 5 \cdot 2^n$ $\big($per ogni $n \in \mathbb{N}\big)$, dimostrare che si ha

$$b_{n+2} \,=\, \frac{5}{3}\, b_{n+1} \,+\, \frac{2}{3}\, b_n \qquad \forall\; n \in \mathbb{N} \quad .$$

[4] Sia Π l'insieme dei numeri naturali *primi*, e sia D_{300} l'insieme dei numeri naturali divisori di 300. Si considerino in D_{300} le due relazioni ρ e η definite come segue: per ogni $h, k \in D_{300}$, si pone

$$h \,\rho\, k \quad \Longleftrightarrow \quad \Big|\big\{\, p' \in \mathbb{N} \,\big|\, p' \in \Pi \,,\, p' \text{ divide } h \,\big\}\Big| \;=\; \Big|\big\{\, p'' \in \mathbb{N} \,\big|\, p'' \in \Pi \,,\, p'' \text{ divide } k \,\big\}\Big|$$

$$h \,\eta\, k \quad \Longleftrightarrow \quad \big\{\, q' \in \mathbb{N} \,\big|\, q' \in \Pi \,,\, q' \text{ divide } h \,\big\} \;=\; \big\{\, q'' \in \mathbb{N} \,\big|\, q'' \in \Pi \,,\, q'' \text{ divide } k \,\big\}$$

(a) Descrivere esplicitamente l'insieme D_{300}.

(b) Dimostrare che per ogni $h, k \in D_{300}$ si ha $h \,\eta\, k \implies h \,\rho\, k$. In altre parole, dimostrare che $\eta \subseteq \rho$ come sottoinsiemi in $D_{300} \times D_{300}$.

(c) Dimostrare che, dati $h, k \in D_{300}$, *in generale* si ha $h \,\rho\, k \;\not\Longrightarrow\; h \,\eta\, k$, cioè che esistono $h', k' \in D_{300}$ tali che $h' \rho\, k'$ e simultaneamente $h' \not\eta\, k'$. In altre parole, dimostrare che $\rho \not\subseteq \eta$ come sottoinsiemi in $D_{300} \times D_{300}$.

(d) Dimostrare che η è una equivalenza.

(e) Dimostrare che ρ è una equivalenza.

(f) Calcolare tutte le classi di equivalenza di η.

(g) Calcolare tutte le classi di equivalenza di ρ.

[5] Si consideri il polinomio booleano $P(x, y, z)$, nelle variabili x, y e z, dato da

$$P(x,y,z) \;:=\; \Big(\Big(\big(\,y'' \vee x \vee z'\,\big)' \vee \big(\,z \wedge 1 \wedge y\,\big)\Big) \wedge \Big(\big(\,x \vee z'\,\big)' \vee x'\Big)\Big) \vee$$
$$\vee \; \Big(1' \vee \big(\,y' \wedge \big(\,0 \vee z''\,\big)\big)' \vee x'\Big)'$$

(a) Determinare la *forma normale disgiuntiva* di $P(x, y, z)$.

(b) Determinare la *somma di tutti gli implicanti primi* di $P(x, y, z)$.

(c) Determinare una *forma minimale* di $P(x, y, z)$.