ALGEBRA e LOGICA
CdL in Ingegneria Informatica
prof. Fabio GAVARINI

a.a. 2013–2014 — Sessione Autunnale, I appello
Esame scritto del 2 Settembre 2014

. . . .

N.B.: compilare il compito in modo <u>*sintetico*</u> *ma* **esauriente***, spiegando chiaramente quanto si fa, e scrivendo in corsivo con grafia leggibile.*

. . . . $\star$ . . . .

[1] Si consideri il polinomio booleano $f(x,y,z)$, nelle variabili x, y e z, dato da

$$f(x,y,z) := \big(\left(z' \wedge 1 \wedge x\right) \vee \left(y' \wedge z\right) \vee 0\big) \wedge \Big(\left(1 \wedge x' \wedge y\right) \vee \left(x' \vee z\right) \vee \left(y \vee 0 \vee x' \vee z\right)'\Big)$$

(a) Determinare la *forma normale disgiuntiva* di ℓ.
(b) Determinare la *somma di tutti gli implicanti primi* di ℓ.
(c) Determinare una *forma minimale* di ℓ.

[2] *(a)* Scrivere in base $b' := 3$ il numero N che in base $b := 9$ è espresso dalla scrittura posizionale $N := \big(76054\big)_9$.

(b) Scrivere in base $b := 9$ il numero T che in base $b' := 3$ è espresso dalla scrittura posizionale $T := \big(211021222\big)_3$.

[3] *(a)* Determinare, se esistono, tutte le successioni reali $\underline{a} := \big\{a_n\big\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tali che

$$a_0 = 4 \quad , \quad a_1 = 2 \quad , \quad a_2 = 0 \quad , \qquad a_n = 6\,a_{n-1} - 9\,a_{n-2} \qquad \forall\ n \geq 2 \ .$$

(b) Determinare, se esistono, tutte le successioni reali $\underline{b} := \big\{b_n\big\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tali che

$$b_0 = 1 \quad , \quad b_1 = -3 \quad , \qquad b_n = 6\,b_{n-1} - 9\,b_{n-2} \qquad \forall\ n \geq 2 \quad .$$

(continua...)

[4] Determinare l'insieme di tutte le soluzioni del sistema di equazioni congruenziali

$$\circledast \; : \; \begin{cases} 43\,x \;\equiv\; 156 \quad \big(\bmod 5\big) \\ 145\,x \;\equiv\; -31 \quad \big(\bmod 7\big) \end{cases}$$

[5] Per ciascuno dei due valori $n = 14$ e $n = 13$ si consideri il rispettivo anello $\mathbb{Z}_n$ delle classi resto dei numeri interi modulo n.

(a) Calcolare i due gruppi degli elementi invertibili

$$U(\mathbb{Z}_{14}) \;:=\; \big\{\, \overline{z} \in \mathbb{Z}_{14} \,\big|\, \exists\, \overline{z}^{\,-1} \in \mathbb{Z}_{14} : \overline{z} \cdot \overline{z}^{\,-1} = \overline{1} \,\big\}$$
$$U(\mathbb{Z}_{13}) \;:=\; \big\{\, \overline{z} \in \mathbb{Z}_{13} \,\big|\, \exists\, \overline{z}^{\,-1} \in \mathbb{Z}_{13} : \overline{z} \cdot \overline{z}^{\,-1} = \overline{1} \,\big\}$$

(b) Risolvere, se possibile, ciascuna delle tre equazioni seguenti:

$\overline{21} \cdot \overline{x} = -\overline{35}$ in $\mathbb{Z}_{14}$, $\qquad \overline{13} \cdot \overline{x} = \overline{20}$ in $\mathbb{Z}_{14}$, $\qquad \overline{21} \cdot \overline{x} = -\overline{35}$ in $\mathbb{Z}_{13}$.

— ⋆ —

<u>SOLUZIONI</u>

[1] — *(a)* *F.N.D.* $= (\, x \wedge y' \wedge z \,) \vee \big(x \wedge y' \wedge z'\big) \vee \big(x' \wedge y' \wedge z\big)$

(b) *s.t.i.p.* $= (\, x \wedge y' \,) \vee \big(y' \wedge z\big)$

(c) *f.m.* $= (\, x \wedge y' \,) \vee \big(y' \wedge z\big)$, e questa è *l'unica* forma minimale possibile.

[2] — *(a)* $N \;=\; \big(2120001211\big)_3$; *(b)* $T \;=\; \big(24258\big)_9$

[3] — *(a)* Non esiste nessuna successione $\underline{a} := \big\{a_n\big\}_{n\in\mathbb{N}}$ del tipo richiesto.

(b) Esiste una e una sola $\underline{b} := \big\{b_n\big\}_{n\in\mathbb{N}}$ del tipo richiesto, data dalla formula

$$b_n \;=\; 3^n - 2\,n\,3^n \;=\; (1 - 2\,n)\,3^n \,, \quad \forall\;\, n \in \mathbb{N} \;\; .$$

[4] — $x \,\equiv\, 12 \;\; \big(\bmod 35\big)$, o in altri termini $x \;=\; 12 + 35\,z \,,\;\; \forall\;\, z \in \mathbb{Z}$.

[5] — *(a)* $U(\mathbb{Z}_{14}) \;=\; \big\{\,\overline{1}\,,\,\overline{3}\,,\,\overline{5}\,,\,\overline{9}\,,\overline{11}\,,\overline{13}\,\big\}$, $U(\mathbb{Z}_{13}) \;=\; \big\{\,\overline{1}\,,\overline{2}\,,\,\overline{3}\,,\,\dots\,,\overline{12}\,\big\}$

(b) Le soluzioni cercate sono, rispettivamente: per la prima equazione $\overline{x} \;\in\; \big\{\,\overline{1}\,,\overline{3}\,,\,\overline{5}\,,\,\dots\,,\,\overline{13}\,\big\}$ $\big(\subseteq \mathbb{Z}_{14}\big)$; per la seconda equazione $\overline{x} \;=\; \overline{8}$ $\big(\in \mathbb{Z}_{14}\big)$; per la terza equazione $\overline{x} \;=\; \overline{7}$ $\big(\in \mathbb{Z}_{13}\big)$.