

ALGEBRA e LOGICA
CdL in Ingegneria Informatica
prof. Fabio GAVARINI

a.a. 2016–2017 — Sessione Estiva Anticipata, I appello
Esame scritto del 2 Febbraio 2017

.....

*N.B.: compilare il compito in modo sintetico ma **esauriente**, spiegando
chiaramente quanto si fa, e scrivendo in corsivo con grafia leggibile.*

..... \mathcal{R}

[1] Dato l'insieme $\{S, P, Q, R\}$, si consideri il corrispondente insieme delle parti $\mathcal{P}(\{S, P, Q, R\})$, dotato della relazione (d'ordine) di inclusione; per semplificare la notazione indicheremo un sottoinsieme $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ con $\underline{x_1 x_2 \dots x_n} := \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Si consideri poi in $\mathcal{P}(\{S, P, Q, R\})$ il sottoinsieme

$$\mathbb{F} := \{ \emptyset, \underline{S}, \underline{Q}, \underline{R}, \underline{SP}, \underline{QR}, \underline{SPQR} \}$$

dotato a sua volta della relazione (d'ordine) di inclusione.

(a) Verificare che l'insieme ordinato $(\mathbb{F}; \subseteq)$ è un reticolo, scrivendo esplicitamente tutti i valori $\sup(x, y)$ e $\inf(x, y)$ per ogni $x, y \in \mathbb{F}$.

(b) Determinare tutti gli atomi e tutti gli elementi \vee -irriducibili del reticolo \mathbb{F} .

(c) Esiste una \vee -fattorizzazione non ridondante in *fattori* \vee -irriducibili per l'elemento \underline{SPQR} nel reticolo \mathbb{F} ? In caso affermativo, si determini esplicitamente una tale \vee -fattorizzazione; in caso negativo, si spieghi perché essa non esista.

(d) Esiste una \vee -fattorizzazione non ridondante in *atomi* per l'elemento \underline{SPQR} nel reticolo \mathbb{F} ? In caso affermativo, si determini esplicitamente una tale \vee -fattorizzazione; in caso negativo, si spieghi perché essa non esista.

(e) Stabilire, motivando la risposta, se l'insieme ordinato $(\mathbb{F}; \subseteq)$ sia un'algebra di Boole oppure no.

[2] Dati i due numeri interi 228 e 495, calcolare:

(a) il M.C.D.(228, 495);

(b) una identità di Bézout per M.C.D.(228, 495);

(c) il m.c.m.(228, 495).

(continua...)

[3] Si consideri il polinomio booleano

$$q(h, k, \ell) := \left(((h' \vee 0 \vee h)' \vee (k'' \vee \ell \vee k)) \wedge (\ell \vee 1' \vee h)' \right) \vee \\ \vee \left((\ell'' \vee h \vee \ell) \wedge (\ell' \vee k'' \vee 0 \vee h'' \vee k) \right)'$$

(a) Calcolare la *Forma Normale Disgiuntiva* di $q(h, k, \ell)$.

(b) Calcolare una *forma minimale* di $q(h, k, \ell)$.

[4] (a) Calcolare il *minimo* valore di $x \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ tale che $7x \equiv 49^{29618} \pmod{77}$.

(b) Nell'anello \mathbb{Z}_{77} degli interi modulo 77, determinare se esista la classe $[7]_{77}^{-1}$ inversa della classe $[7]_{77}$. In caso negativo si spieghi perché la classe inversa non esista; in caso affermativo si calcoli esplicitamente tale classe inversa.

(c) Nell'anello \mathbb{Z}_{11} degli interi modulo 11, determinare se esista la classe $[7]_{11}^{-1}$ inversa della classe $[7]_{11}$. In caso negativo si spieghi perché la classe inversa non esista; in caso affermativo si determini esplicitamente tale classe inversa.

[5] Si considerino l'insieme $\mathbb{V}_I := \{\text{parole della lingua italiana}\}$ e l'insieme di lettere $Y := \{D, N, A\}$. Si consideri poi in \mathbb{V}_I la relazione \triangleleft definita da

$$\mathcal{P}_1 \triangleleft \mathcal{P}_2 \iff \text{“la parola } \mathcal{P}_1 \text{ contiene al più tante lettere} \\ \text{di } Y \text{ quante ne contiene la parola } \mathcal{P}_2 \text{”}$$

dove le lettere, se compaiono più di una volta, vanno contate una volta sola (dunque *senza molteplicità*).

(a) Si dimostri che la relazione \triangleleft è una relazione di preordine in \mathbb{V}_I , ma *non* di ordine.

(b) Si dimostri che la relazione $\triangleleft \triangleright := \triangleleft \cap \triangleright = \triangleleft \cap \triangleleft^{-1}$ è una relazione di equivalenza in \mathbb{V}_I .

(c) Determinare la cardinalità dell'insieme quoziente $\left| \mathbb{V}_I / \triangleleft \triangleright \right|$.

(d) Descrivere esplicitamente le quattro classi di $\triangleleft \triangleright$ -equivalenza $[DADO]_{\triangleleft \triangleright}$, $[TUBO]_{\triangleleft \triangleright}$, $[NANO]_{\triangleleft \triangleright}$ e $[ORDE]_{\triangleleft \triangleright}$.