

**ALGEBRA e LOGICA**  
**CdL in Ingegneria Informatica**  
*prof. Fabio GAVARINI*

*a.a. 2016–2017 — Sessione Estiva Anticipata, I appello*  
Esame scritto del 2 Febbraio 2017

.....

*N.B.: compilare il compito in modo sintetico ma **esauriente**, spiegando  
chiaramente quanto si fa, e scrivendo in corsivo con grafia leggibile.*

.....  $\mathcal{G}$  .....

[1] Dato l'insieme  $\{J, Q, K, A\}$ , si consideri il corrispondente insieme delle parti  $\mathcal{P}(\{J, Q, K, A\})$ , dotato della relazione (d'ordine) di inclusione; per semplificare la notazione indicheremo un sottoinsieme  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  con  $\underline{x_1 x_2 \dots x_n} := \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ . Si consideri poi in  $\mathcal{P}(\{J, Q, K, A\})$  il sottoinsieme

$$\mathbb{E} := \{ \emptyset, \underline{J}, \underline{Q}, \underline{A}, \underline{JQ}, \underline{KA}, \underline{JQKA} \}$$

dotato a sua volta della relazione (d'ordine) di inclusione.

(a) Verificare che l'insieme ordinato  $(\mathbb{E}; \subseteq)$  è un reticolo, scrivendo esplicitamente tutti i valori  $\sup(r, s)$  e  $\inf(r, s)$  per ogni  $r, s \in \mathbb{E}$ .

(b) Determinare tutti gli atomi e tutti gli elementi  $\vee$ -irriducibili del reticolo  $\mathbb{E}$ .

(c) Esiste una  $\vee$ -fattorizzazione non ridondante in *fattori*  $\vee$ -irriducibili per l'elemento  $\underline{JQKA}$  nel reticolo  $\mathbb{E}$ ? In caso affermativo, si determini esplicitamente una tale  $\vee$ -fattorizzazione; in caso negativo, si spieghi perché essa non esista.

(d) Esiste una  $\vee$ -fattorizzazione non ridondante in *atomi* per l'elemento  $\underline{JQKA}$  nel reticolo  $\mathbb{E}$ ? In caso affermativo, si determini esplicitamente una tale  $\vee$ -fattorizzazione; in caso negativo, si spieghi perché essa non esista.

(e) Stabilire, motivando la risposta, se l'insieme ordinato  $(\mathbb{E}; \subseteq)$  sia un'algebra di Boole oppure no.

[2] Dati i due numeri interi 207 e 474, calcolare:

(a) il M.C.D.(207, 474);

(b) una identità di Bézout per M.C.D.(207, 474);

(c) il m.c.m.(207, 474).

(continua...)

[3] Si consideri il polinomio booleano

$$p(a, b, c) := \left( (c \vee 1' \vee a)' \wedge ((b'' \vee c \vee b) \vee (a \vee 0 \vee a')') \right) \vee \\ \vee \left( (b \vee c' \vee a'' \vee 0 \vee b'') \wedge (c \vee a \vee c) \right)'$$

(a) Calcolare la *Forma Normale Disgiuntiva* di  $p(a, b, c)$ .

(b) Calcolare una *forma minimale* di  $p(a, b, c)$ .

[4] (a) Calcolare il *minimo* valore di  $x \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  tale che  $5x \equiv 25^{192} \pmod{65}$ .

(b) Nell'anello  $\mathbb{Z}_{65}$  degli interi modulo 65, determinare se esista la classe  $[5]_{65}^{-1}$  inversa della classe  $[5]_{65}$ . In caso negativo si spieghi perché la classe inversa non esista; in caso affermativo si calcoli esplicitamente tale classe inversa.

(c) Nell'anello  $\mathbb{Z}_{13}$  degli interi modulo 13, determinare se esista la classe  $[5]_{13}^{-1}$  inversa della classe  $[5]_{13}$ . In caso negativo si spieghi perché la classe inversa non esista; in caso affermativo si determini esplicitamente tale classe inversa.

[5] Si considerino l'insieme  $\mathbb{V}_I := \{\text{parole della lingua italiana}\}$  e l'insieme di lettere  $\Lambda := \{F, C, R\}$ . Si consideri poi in  $\mathbb{V}_I$  la relazione  $\bowtie$  definita da

$$\mathcal{P}_1 \bowtie \mathcal{P}_2 \iff \begin{array}{l} \text{“la parola } \mathcal{P}_1 \text{ contiene al più tante lettere} \\ \text{di } \Lambda \text{ quante ne contiene la parola } \mathcal{P}_2 \text{”} \end{array}$$

dove le lettere, se compaiono più di una volta, vanno contate una volta sola (dunque *senza molteplicità*).

(a) Si dimostri che la relazione  $\bowtie$  è una relazione di preordine in  $\mathbb{V}_I$ , ma *non* di ordine.

(b) Si dimostri che la relazione  $\bowtie := \bowtie \cap \bowtie = \bowtie \cap \bowtie^{-1}$  è una relazione di equivalenza in  $\mathbb{V}_I$ .

(c) Determinare la cardinalità dell'insieme quoziente  $\left| \mathbb{V}_I / \bowtie \right|$ .

(d) Descrivere esplicitamente le quattro classi di  $\bowtie$ -equivalenza  $[AFTA]_{\bowtie}$ ,  $[CERO]_{\bowtie}$ ,  $[SETA]_{\bowtie}$  e  $[RIGO]_{\bowtie}$ .