

ALGEBRA e LOGICA
CdL in Ingegneria Informatica
prof. Fabio GAVARINI

a.a. 2016–2017 — Sessione Estiva Anticipata, I appello
Esame scritto del 2 Febbraio 2017

.....

*N.B.: compilare il compito in modo sintetico ma **esauriente**, spiegando
chiaramente quanto si fa, e scrivendo in corsivo con grafia leggibile.*

..... \mathcal{B}

[1] Dato l'insieme $\{\heartsuit, \spadesuit, \clubsuit, \diamondsuit\}$, si consideri il corrispondente insieme delle parti $\mathcal{P}(\{\heartsuit, \spadesuit, \clubsuit, \diamondsuit\})$, dotato della relazione (d'ordine) di inclusione; per semplificare la notazione indicheremo un sottoinsieme $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ con $\underline{x_1 x_2 \dots x_n} := \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Si consideri poi in $\mathcal{P}(\{\heartsuit, \spadesuit, \clubsuit, \diamondsuit\})$ il sottoinsieme

$$\mathbb{H} := \{ \emptyset, \underline{\heartsuit}, \underline{\clubsuit}, \underline{\diamondsuit}, \underline{\heartsuit \clubsuit}, \underline{\clubsuit \diamondsuit}, \underline{\heartsuit \spadesuit \clubsuit \diamondsuit} \}$$

dotato a sua volta della relazione (d'ordine) di inclusione.

(a) Verificare che l'insieme ordinato $(\mathbb{H}; \subseteq)$ è un reticolo, scrivendo esplicitamente tutti i valori $\sup(x, y)$ e $\inf(x, y)$ per ogni $x, y \in \mathbb{H}$.

(b) Determinare tutti gli atomi e tutti gli elementi \vee -irriducibili del reticolo \mathbb{H} .

(c) Esiste una \vee -fattorizzazione non ridondante in *fattori* \vee -irriducibili per l'elemento $\underline{\heartsuit \spadesuit \clubsuit \diamondsuit}$ nel reticolo \mathbb{H} ? In caso affermativo, si determini esplicitamente una tale \vee -fattorizzazione; in caso negativo, si spieghi perché essa non esista.

(d) Esiste una \vee -fattorizzazione non ridondante in *atomi* per l'elemento $\underline{\heartsuit \spadesuit \clubsuit \diamondsuit}$ nel reticolo \mathbb{H} ? In caso affermativo, si determini esplicitamente una tale \vee -fattorizzazione; in caso negativo, si spieghi perché essa non esista.

(e) Stabilire, motivando la risposta, se l'insieme ordinato $(\mathbb{H}; \subseteq)$ sia un'algebra di Boole oppure no.

[2] Dati i due numeri interi 225 e 489, calcolare:

(a) il M.C.D.(225, 489);

(b) una identità di Bézout per M.C.D.(225, 489);

(c) il m.c.m.(225, 489).

(continua...)

[3] Si consideri il polinomio booleano

$$d(u, v, w) := \left((u' \vee v'' \vee u') \wedge (w'' \vee u \vee w \vee 1' \vee v'') \right)' \vee \\ \vee \left((u' \vee 0 \vee v)' \wedge ((w'' \vee u' \vee w) \vee (v \vee 0 \vee v')') \right)$$

(a) Calcolare la *Forma Normale Disgiuntiva* di $d(u, v, w)$.

(b) Calcolare una *forma minimale* di $d(u, v, w)$.

[4] (a) Calcolare il *minimo* valore di $x \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ tale che $4x \equiv 16^{191} \pmod{76}$.

(b) Nell'anello \mathbb{Z}_{76} degli interi modulo 76, determinare se esista la classe $[4]_{76}^{-1}$ inversa della classe $[4]_{76}$. In caso negativo si spieghi perché la classe inversa non esista; in caso affermativo si calcoli esplicitamente tale classe inversa.

(c) Nell'anello \mathbb{Z}_{19} degli interi modulo 19, determinare se esista la classe $[4]_{19}^{-1}$ inversa della classe $[4]_{19}$. In caso negativo si spieghi perché la classe inversa non esista; in caso affermativo si determini esplicitamente tale classe inversa.

[5] Si considerino l'insieme $\mathbb{V}_I := \{\text{parole della lingua italiana}\}$ e l'insieme di lettere $X := \{B, I, T\}$. Si consideri poi in \mathbb{V}_I la relazione \triangleleft definita da

$$\mathcal{P}_1 \triangleleft \mathcal{P}_2 \iff \begin{array}{l} \text{“la parola } \mathcal{P}_1 \text{ contiene al più tante lettere} \\ \text{di } X \text{ quante ne contiene la parola } \mathcal{P}_2 \text{”} \end{array}$$

dove le lettere, se compaiono più di una volta, vanno contate una volta sola (dunque *senza molteplicità*).

(a) Si dimostri che la relazione \triangleleft è una relazione di preordine in \mathbb{V}_I , ma *non* di ordine.

(b) Si dimostri che la relazione $\trianglelefteq := \triangleleft \cap \triangleright = \triangleleft \cap \triangleleft^{-1}$ è una relazione di equivalenza in \mathbb{V}_I .

(c) Determinare la cardinalità dell'insieme quoziente $\left| \mathbb{V}_I / \trianglelefteq \right|$.

(d) Descrivere esplicitamente le quattro classi di \trianglelefteq -equivalenza $[BARO]_{\trianglelefteq}$, $[FARO]_{\trianglelefteq}$, $[ALTO]_{\trianglelefteq}$ e $[TORI]_{\trianglelefteq}$.