Università degli Studi di Roma "Tor Vergata"

CdL in Ingegneria Informatica

corso di "Algebra e Logica" (prof. Fabio Gavarini)

Tutorato sui RETICOLI

········· ∗ ·········

1 — Siano L_1 e L_2 due reticoli.

(a) Considerando in $L_1 \times L_2$ la relazione di *ordine prodotto* — rispetto agli ordini in L_1 e in L_2 — dimostrare che $L_1 \times L_2$ è a sua volta un reticolo.

(b) Considerando in $L_1 \times L_2$ le operazioni $\vee$ e $\wedge$ ottenute dalle analoghe operazioni in L_1 e in L_2 operando componente per componente, dimostrare che $L_1 \times L_2$ è a sua volta un reticolo.

(c) Dimostrare che la relazione d'ordine considerata in *(a)* e le operazioni considerate in *(b)* nel reticolo $L_1 \times L_2$ si corrispondono secondo il teorema generale di corrispondenza che collega la relazione d'ordine e le operazioni in un qualsiasi reticolo.

2 — Sia L un reticolo (non vuoto), sia X un insieme non vuoto, e sia L^X l'insieme di tutte le funzioni da X a L, con la sua struttura standard di reticolo. Dimostrare che:

(a) se L è distributivo, allora anche L^X è a sua volta distributivo;

(b) se L è limitato, allora anche L^X è a sua volta limitato.

(c) se L è (limitato e) complementato, allora anche L^X è a sua volta (limitato e) complementato.

3 — Si considerino i due insiemi $[0,5]_{\mathbb{N}} := \{0,1,2,3,4,5\}$ e $[0,4]_{\mathbb{N}} := \{0,1,2,3,4\}$, ciascuno dotato della relazione d'ordine indotta da quella (standard) in $\mathbb{N}$.

(a) Descrivere esplicitamente — disegnando il relativo diagramma di Hasse — l'insieme ordinato prodotto $[0,5]_{\mathbb{N}} \times [0,4]_{\mathbb{N}}$.

(b) Generalizzare l'analisi al punto precedente considerando l'insieme ordinato prodotto $[0,n_1]_{\mathbb{N}} \times [0,n_2]_{\mathbb{N}} \times \cdots \times [0,n_k]_{\mathbb{N}}$ in cui $n_1, n_2, \dots, n_k \in \mathbb{N}$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$ poniamo $[0,n]_{\mathbb{N}} := \{0,1,2,\dots,n-1,n\}$ con la relazione d'ordine indotta da quella in $\mathbb{N}$.

4 — Sia $(E\,;\preceq)$ un insieme ordinato in cui la relazione d'ordine sia *totale*. Dimostrare allora che:

(a) $(E\,;\preceq)$ è un reticolo;

(b) il reticolo $(E\,;\preceq)$ è distributivo;

(c) supponendo che sia limitato, il reticolo $(E\,;\preceq)$ è complementato $\iff |E| \leq 2$.

5 — Siano $L_1\,, L_2\,, \dots\,, L_k$ due reticoli, e consideriamo in $L_1 \times L_2$ la struttura standard di reticolo prodotto.

(a) Determinare tutti gli elementi $\vee$–riducibili del reticolo $L_1 \times L_2$.

(b) Determinare tutti gli elementi $\vee$–irriducibili del reticolo $L_1 \times L_2$.

(c) Nel caso in cui i reticoli L_1 e L_2 siano limitati inferiormente (cioè tali che esista $0_i := \min(L_i)$ per ogni $i \in \{1\,,2\,,\dots\,,k\}$), dimostrare che il reticolo prodotto $L_1 \times L_2$ è a sua volta limitato inferiormente, descrivendone esplicitamente il minimo.

(d) Nel caso in cui i reticoli L_1 e L_2 siano limitati inferiormente, determinare tutti gli atomi del reticolo prodotto $L_1 \times L_2$.

(e) Rispondere agli stessi quesiti nel caso di k reticoli $L_1\,, L_2\,, \dots\,, L_k$ per ogni $k \geq 2$.

6 — Nei reticoli (limitati) D_{60} e D_{72} si determinino esplicitamente:

(a) tutti gli elementi $\vee$–irriducibili;

(b) tutti gli atomi;

(c) tutti gli elementi che abbiano un complemento, precisando quale sia tale complemento (eventualmente non unico).

7 — Sia D_{56} l'insieme dei numeri naturali divisori di 56, dotato della relazione d'ordine di *divisibilità*, e sia $\mathcal{P}\big(\{x\,,y\,,z\}\big)$ l'insieme delle parti dell'insieme $\{x\,,y\,,z\}$, dotato della relazione d'ordine di *inclusione*; in particolare, entrambi sono insiemi ordinati.

(a) D_{56} è totalmente ordinato? $\mathcal{P}\big(\{x\,,y\,,z\}\big)$ è totalmente ordinato?

(b) D_{56} è limitato? $\mathcal{P}\big(\{x\,,y\,,z\}\big)$ è limitato? In entrambi i casi, se la risposta è negativa si spieghi il perché, se è affermativa si precisi chi siano i limiti (cioè max e min).

(c) D_{56} è un *reticolo*? $\mathcal{P}\big(\{x\,,y\,,z\}\big)$ è un *reticolo*? Se sono entrambi reticoli, sono isomorfi l'uno all'altro?

(d) Quali sono — se esistono — gli *atomi* di D_{56} e gli atomi di $\mathcal{P}\big(\{x\,,y\,,z\}\big)$?

8 — Dato l'insieme $\{\heartsuit\,,\spadesuit\,,\clubsuit\,,\diamondsuit\}$, si consideri il corrispondente insieme delle parti $\mathcal{P}\big(\{\heartsuit\,,\spadesuit\,,\clubsuit\,,\diamondsuit\}\big)$, dotato della relazione (d'ordine) di inclusione; per semplificare la notazione indicheremo un sottoinsieme $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ con $\underline{x_1\,x_2\,\dots\,x_n} := \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Si consideri poi in $\mathcal{P}\big(\{\heartsuit\,,\spadesuit\,,\clubsuit\,,\diamondsuit\}\big)$ il sottoinsieme

$$\mathbb{H} := \big\{\, \emptyset\,, \underline{\heartsuit}\,, \underline{\clubsuit}\,, \underline{\diamondsuit}\,, \underline{\heartsuit\clubsuit}\,, \underline{\clubsuit\diamondsuit}\,, \underline{\heartsuit\spadesuit\clubsuit\diamondsuit} \,\big\}$$

dotato a sua volta della relazione (d'ordine) di inclusione.

(a) Verificare che l'insieme ordinato $\big(\mathbb{H}\,;\subseteq\big)$ è un reticolo, scrivendo esplicitamente tutti i valori $\sup(x,y)$ e $\inf(x,y)$ per ogni $x, y \in \mathbb{H}$.

(b) Determinare tutti gli atomi e tutti gli elementi $\vee$–irriducibili del reticolo $\mathbb{H}$.

(c) Esiste una $\vee$–fattorizzazione non ridondante in *fattori $\vee$–irriducibili* per l'elemento $\underline{\heartsuit\spadesuit\clubsuit\diamondsuit}$ nel reticolo $\mathbb{H}$? In caso affermativo, si determini esplicitamente una tale $\vee$–fattorizzazione; in caso negativo, si spieghi perché essa non esista.

(d) Esiste una $\vee$–fattorizzazione non ridondante in *atomi* per l'elemento $\underline{\heartsuit\spadesuit\clubsuit\diamondsuit}$ nel reticolo $\mathbb{H}$? In caso affermativo, si determini esplicitamente una tale $\vee$–fattorizzazione; in caso negativo, si spieghi perché essa non esista.

(e) Stabilire se il reticolo $\big(\mathbb{H}\,;\subseteq\big)$ sia complementato oppure no.

9 — Si considerino gli insiemi $E := \big\{ 2\,,4\,,5\,,6\,,10\,,60\,,180 \big\}$ e $E^* := E \setminus \{5\}$. Si consideri in E la relazione (d'ordine) di *divisibilità*, indicata con δ, e in E^* la relazione indotta, indicata ancora con δ, così che $\big(E\,;\delta\big)$ e $\big(E^*\,;\delta\big)$ sono insiemi ordinati.

Per entrambi i casi $X := E$ e $X := E^*$, si risponda alle seguenti domande:

(a) Disegnare il diagramma di Hasse dell'insieme ordinato $\big(X;\delta\big)$.

(b) $\big(X;\delta\big)$ è *totalmente* ordinato? Perché?

(c) $\big(X;\delta\big)$ è un *reticolo*? Perché? *In caso affermativo*, il reticolo in esame è *distributivo*? È un reticolo *complementato*?

(d) Quali sono — se esistono — gli elementi *massimali* in $\big(X;\delta\big)$?

(e) Quali sono — se esistono — gli elementi *minimali* in $\big(X;\delta\big)$?

(f) Esiste un *massimo* in $\big(X;\delta\big)$? Se sì, qual è? Se no, perché non esiste?

(g) Esiste un *minimo* in $\big(X;\delta\big)$? Se sì, qual è? Se no, perché non esiste?

10 — Si consideri il reticolo D_n dei divisori di n per i due valori $n := 315$ e $n := 165$.

(a) Determinare tutti gli atomi e tutti gli elementi $\vee$–irriducibili di D_{315} e di D_{165}.

(b) Determinare una $\vee$–fattorizzazione non ridondante in fattori $\vee$–irriducibili degli elementi $b := 45 \in D_{315}$, $d := 55 \in D_{165}$ e $q := 15 \in D_{165}$, se possibile; se invece non fosse possibile, se ne spieghi il perché.

(c) Stabilire, motivando le conclusioni, se D_{315} e/o D_{165} sia un'algebra di Boole.

11 — Sia $\mathcal{P}\big(\{S,P,Q,R\}\big)$ l'insieme delle parti dell'insieme $\{S,P,Q,R\}$ e "$\supseteq$" la consueta relazione di "inclusione inversa" in $\mathcal{P}\big(\{S,P,Q,R\}\big)$, definita da $\mathcal{A} \supseteq \mathcal{B}$ se e soltanto se $\mathcal{A}$ contiene $\mathcal{B}$ — per ogni $\mathcal{A}\,,\mathcal{B} \in \mathcal{P}\big(\{S,P,Q,R\}\big)$.

Sia poi $D_{60} := \big\{ d \in \mathbb{N} \,\big|\, d \text{ è divisore di } 60 \big\}$ l'insieme dei divisori di 60, e sia "$\big|$" la consueta relazione di divisibilità in D_{60}.

Nell'insieme $E := \mathcal{P}\big(\{S,P,Q,R\}\big) \times D_{60}$ prodotto cartesiano di $\mathcal{P}\big(\{S,P,Q,R\}\big)$ con D_{60} consideriamo la relazione $\preceq$ definita da

$$\big(\mathcal{A}\,,d\big) \preceq \big(\mathcal{B}\,,q\big) \quad\iff\quad \mathcal{A} \supseteq \mathcal{B} \;\;,\;\; d\,\big|\,q$$

per ogni $\big(\mathcal{A}\,,d\big)\,,\big(\mathcal{B}\,,q\big) \in \mathcal{P}\big(\{S,P,Q,R\}\big) \times D_{60} =: E$.

(a) Dimostrare che $\preceq$ è una relazione d'ordine in E.

(b) Esiste un *minimo* nell'insieme ordinato $\big(E\,;\preceq\big)$? In caso negativo, spiegare perché; in caso affermativo, precisare quale sia tale minimo.

(c) Esiste un *massimo* nell'insieme ordinato $\big(E\,;\preceq\big)$? In caso negativo, spiegare perché; in caso affermativo, precisare quale sia tale massimo.

(d) Dimostrare che l'insieme ordinato $\big(E\,;\,\preceq\big)$ è un reticolo, *precisando come siano fatte le operazioni "$\vee :=$ sup" e "$\wedge :=$ inf"* in tale reticolo.

(e) Determinare se esista una $\vee$–fattorizzazione in $\vee$–irriducibili per l'elemento $\big(\{S,Q\}\,,30\big)$ nel reticolo $\big(E\,;\,\preceq\big)$. In caso negativo, si spieghi perché una tale $\vee$–fattorizzazione non esista; in caso affermativo, si determini esplicitamente una tale $\vee$–fattorizzazione.

12 — Sia $D_{90} := \big\{\, n \in \mathbb{N} \,\big|\, n \text{ divide } 90 \big\}$ l'insieme dei numeri naturali divisori di 90, e sia $D_{90}^{-} := D_{90} \setminus \{2\,,3\,,90\}$. In entrambi gli insiemi, consideriamo la *relazione di divisibilità*, indicata con δ, cioè

$$b\,\delta\,a \iff \exists\, q \in \mathbb{N} \,:\, a = b\,q \qquad\qquad \forall\ a,b \in D_{90} \quad \text{oppure} \quad a,b \in D_{90}^{-}$$

così che $\big(D_{90}\,;\delta\big)$ e $\big(D_{90}^{-}\,;\delta\big)$ sono insiemi ordinati.

Si risolvano i seguenti problemi considerando per ciascuno di essi *entrambi gli insiemi ordinati* $\big(X\,;\preceq\big) := \big(D_{90}\,;\delta\big)$ e $\big(X\,;\preceq\big) := \big(D_{90}^{-}\,;\delta\big)$.

(a) Esiste un *massimo* in $\big(X\,;\preceq\big)$? Esiste un *minimo* in $\big(X\,;\preceq\big)$? In entrambe le situazioni, in caso affermativo si specifichi chi sia tale massimo o minimo; in caso negativo invece si giustifichi la risposta.

(b) Esistono *elementi massimali* in $\big(X\,;\preceq\big)$? Esistono *elementi minimali* in $\big(X\,;\preceq\big)$? Se sì, quali sono? Se no, perché?

(c) Esistono in $\big(X\,;\preceq\big)$ degli *atomi*? Se no, perché? Se sì, quali sono?

(d) Esistono in $\big(X\,;\preceq\big)$ degli *elementi $\vee$–irriducibili*? Se no, perché? Se sì, quali sono?

(e) L'insieme ordinato $\big(X\,;\preceq\big)$ è un reticolo? Perché?

(f) L'insieme ordinato $\big(X\,;\preceq\big)$ è un'algebra di Boole? Perché?

(g) Esiste in $\big(X\,;\preceq\big)$ una $\vee$–fattorizzazione di 30 in fattori *$\vee$–irriducibili*? Se no, spiegare il perché. Se sì, calcolare esplicitamente una tale fattorizzazione.

(h) Esiste in $\big(X\,;\preceq\big)$ una $\vee$–fattorizzazione di 30 in *atomi*? Se no, spiegare il perché. Se sì, calcolare esplicitamente una tale fattorizzazione.

13 — Si consideri il reticolo D_{270} dei divisori di 270, con la usuale relazione d'ordine data dalla divisibilità.

(a) Determinare tutti gli atomi e tutti gli elementi $\vee$–irriducibili di D_{270}.

(b) Determinare una $\vee$–fattorizzazione non ridondante in fattori $\vee$–irriducibili per gli elementi $90, 54, 135 \in D_{270}$, se possibile; se invece non fosse possibile, si spieghi perché.

(c) Stabilire, motivando la risposta, se D_{270} sia un'algebra di Boole oppure no.

(d) Determinare tutti gli elementi massimali e tutti gli elementi minimali del sottoinsieme ordinato $D' := D_{270} \setminus \{270\,,3\,,1\}$ di D_{270}.

(e) Si consideri il sottoinsieme ordinato $D'' := \{1\,,3\,,2\,,18\,,30\,,60\}$ di D_{270} (sempre rispetto alla relazione di divisibilità). È un reticolo?

14 — Si consideri l'insieme $E := \{2, 3, 4, 6, 12, 25, 30, 90, 150, 270\}$ e in esso la relazione d'ordine $\delta := \delta_{\mathbb{N}}$ data dalla "divisibilità" in $\mathbb{N}$, cioè $d' \,\delta\, d''$ se e soltanto se d' divide d'' in $\mathbb{N}$.

(a) Disegnare il *diagramma di Hasse* dell'insieme ordinato $\big(E\,;\,\delta\big)$.

(b) Determinare tutti gli (eventuali) *elementi massimali* di E.

(c) Determinare tutti gli (eventuali) *elementi minimali* di E.

(d) Esiste un *massimo* in E? Esiste un *minimo* in E?

(e) L'insieme ordinato $\big(E\,;\,\delta\big)$ è un reticolo?