

corso di “Algebra e Logica” (prof. Fabio Gavarini)

TUTORATO su RELAZIONI, INDUZIONE, SCRITTURA POSIZIONALE

..... *

1 — Sia $\vdash$ una relazione in un insieme $E \neq \emptyset$ che sia un “preordine”, cioè sia riflessiva e transitiva.

(a) Dimostrare che la relazione $\sigma_{\vdash} := \vdash \cap \vdash^{-1}$ in E , descritta esplicitamente da

$$a \sigma_{\vdash} b \iff (a \vdash b) \wedge (b \vdash a), \quad \forall a, b \in E$$

è un’equivalenza in E .

(b) Descrivere esplicitamente le singole classi di equivalenza di $\sigma_{\vdash}$.

(c) Dimostrare che nell’insieme quoziente $E/\sigma_{\vdash}$ esiste una ben definita relazione $\overline{\vdash}$ data da

$$[a]_{\sigma_{\vdash}} \overline{\vdash} [b]_{\sigma_{\vdash}} \iff a \vdash b, \quad \forall a, b \in E$$

(N.B.: si tratta soltanto di dimostrare che la definizione di $\overline{\vdash}$ sia *ben posta*).

(d) Dimostrare che la relazione $\overline{\vdash}$ nell’insieme quoziente $E/\sigma_{\vdash}$ definita in (c) è una relazione d’ordine.

2 — Applicare l’esercizio 1 qui sopra al caso specifico in cui $E := \mathbb{Z}$ e $\vdash := | = \delta_{\mathbb{Z}}$ (la relazione di “divisibilità” in $\mathbb{Z}$).

3 — Sia E un insieme, e siano η_1, η_2 due equivalenze in E .

(a) Dimostrare che la relazione $\eta := \eta_1 \cap \eta_2$ in E è una equivalenza.

(b) Descrivere esplicitamente le classi di equivalenza di $\eta := \eta_1 \cap \eta_2$ in funzione delle classi di equivalenza di η_1 e di η_2 .

4 — Si considerino l’insieme E e i suoi due sottoinsiemi E_+ ed E_- dati da $E := \{S, P, Q, R\}$, $E_+ := \{S, P\}$, $E_- := \{Q, R\}$. Si consideri anche la funzione

$$f : \mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathcal{P}(E_+) , \quad E' \mapsto f(E') := E' \cap E_+ \quad \forall E' \in \mathcal{P}(E)$$

e siano $\rightharpoonup$ e $\preccurlyeq$ le due relazioni in $\mathcal{P}(E)$ definite da

$$E' \rightharpoonup E'' \iff f(E') \subseteq f(E'')$$

$$E' \preccurlyeq E'' \iff (E' \rightharpoonup E'' \ \& \ (E' \cap E_-) \supseteq (E'' \cap E_-)) \quad \forall E', E'' \in \mathcal{P}(E)$$

(a) Dimostrare che la funzione f è suriettiva.

(b) Dimostrare che la funzione f è *non* iniettiva.

(c) Dimostrare che la relazione $\rightharpoonup$ è riflessiva e transitiva ma *non* antisimmetrica.

(d) Dimostrare che la relazione $\preccurlyeq$ è una relazione d’ordine, e tale ordine *non* è totale.

5 — Siano A un insieme e $\underline{2}^A$ il corrispondente insieme delle funzioni caratteristiche in A . Dimostrare per induzione che se A possiede n elementi allora $\underline{2}^A$ possiede 2^n elementi.

6 — Sia A un insieme, e sia $\mathcal{P}(A)$ il corrispondente insieme delle parti di A . Dimostrare per induzione che se A possiede n elementi allora $\mathcal{P}(A)$ possiede 2^n elementi.

7 — Dimostrare per induzione che per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$, vale la disuguaglianza

$$3^n - 5n > 2^n + 4n$$

8 — Dimostrare per induzione i due fatti seguenti:

$$(a) \quad \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{n} \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N} \text{ con } n > 1;$$

$$(b) \quad \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right) = n + 1 \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N} \text{ con } n > 0.$$

9 — Dimostrare per induzione che per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$4^{2n+1} + 3^{n+2} \equiv 0 \pmod{13}$$

10 — Convertire in base dieci (cioè riscriverli usando la notazione posizionale in base dieci) i numeri n' e n'' espressi da $n' := (7503)_8$ e $n'' := (40213)_5$ rispettivamente in base otto e in base cinque.

11 — Sia n il numero naturale che in base due è espresso dalla scrittura posizionale $n = (1011000110)_2$. Scrivere n in base quattro.

12 — Sia n il numero naturale che in base due è espresso dalla scrittura posizionale $n = (11010111011)_2$. Scrivere n in base otto.

13 — Sia n il numero naturale che in base otto è espresso dalla scrittura posizionale $n = (2351)_8$. Scrivere n in base due e in base quattro.

14 — Usando la scrittura posizionale in base $b = \text{dodici}$, tramite le dodici cifre (ordinate!) dell'insieme $\{0, 1, 2, 3, \dots, 8, 9, \perp, \wedge\}$, calcolare — senza passare per la scrittura in base dieci... — la somma $(70\perp 31\wedge 5)_b + (497\wedge \perp 0\wedge)_b$.

15 — Usando la scrittura posizionale in base $b = \text{quattro}$, tramite le quattro “cifre” (in ordine crescente!) dell'insieme $\{\diamond, \clubsuit, \spadesuit, \heartsuit\}$, calcolare la somma

$$S := (\heartsuit\diamond\clubsuit\spadesuit\clubsuit)_b + (\spadesuit\clubsuit\heartsuit\diamond\heartsuit)_b$$