Università degli Studi di Roma "Tor Vergata"

CdL in Ingegneria Informatica

corso di "Algebra e Logica" (prof. Fabio Gavarini)

Tutorato su
CARDINALITÀ e NUMERI INTERI

········· $*$ ·········

1 — Dato $k \in \mathbb{N}$, e posto $\mathbb{N}^k := \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \cdots \times \mathbb{N}$ (con k fattori, tutti uguali a $\mathbb{N}$), dimostrare che

$$\left|\mathbb{N}^k\right| = \left|\mathbb{N}\right|$$

Suggerimento: *Generalizzare il procedimento usato nella dimostrazione del Primo Teorema di Cantor — o "Teorema Fondamentale del Numerabile" — che è esattamente il caso $k = 2$ del risultato in esame. Oppure...*

2 — Dato $k \in \mathbb{N}$ e k insiemi numerabili $S_1, S_2, \dots, S_k$, dimostrare che l'insieme prodotto cartesiano $S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_{k-1} \times S_k$ è a sua volta numerabile.

3 — Costruire una biiezione esplicita $X \hookrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow Y$ per le seguenti coppie di insiemi:

$$\big(X,Y\big) = \big(\mathbb{N}, \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}\big), \qquad \big(X,Y\big) = \big(\mathbb{Z}, \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}\big), \qquad \big(X,Y\big) = \big(\mathbb{N}, \mathbb{N} \amalg \mathbb{N} \amalg \cdots \amalg \mathbb{N}\big)$$

4 — Per ogni $k \in \mathbb{N}_+$, sia $\mathcal{P}_k(\mathbb{N})$ l'insieme di tutti i sottoinsiemi di $\mathbb{N}$ che abbiano cardinalità k. Dimostrare che

$$\left|\mathcal{P}_k(\mathbb{N})\right| = \left|\mathbb{N}\right| \qquad \forall\ k \in \mathbb{N}_+$$

Suggerimento: *Ad esempio, si può sfruttare il fatto che ogni elemento in $\mathcal{P}_k(\mathbb{N})$ è l'immagine di una qualche funzione da $\{1, \dots, k\}$ a $\mathbb{N}$ e poi ottenere il risultato tramite opportune maggiorazioni (tra cardinalità).*

Oppure, nel caso $k = 2$ si trovi una biiezione tra $\mathcal{P}_2(\mathbb{N})$ e il "semiquadrante" $\mathbb{N}^{(2)}_{>} := \big\{ (n_1, n_2) \in \mathbb{N}^2 \,\big|\, n_1 < n_2 \big\}$ e poi dimostrare che $\left|\mathbb{N}^{(2)}_{>}\right| = \left|\mathbb{N}\right|$ tramite una diretta generalizzazione del procedimento usato nella dimostrazione del Primo Teorema di Cantor — o "Teorema Fondamentale del Numerabile". La stessa strategia si può usare in generale per $k > 2$ (il caso $k = 2$ è ovvio...) considerando l'opportuno "spicchio positivo" $\mathbb{N}^{(k)}_{>}$ dentro $\mathbb{N}^k$, soltanto che (de)scrivere esplicitamente una biiezione tra $\mathbb{N}^{(k)}_{>}$ ed $\mathbb{N}$ è più complicato...

5 — Sia $\mathcal{P}_\circ(\mathbb{N})$ l'insieme di tutti i sottoinsiemi *finiti* di $\mathbb{N}$. Dimostrare che

$$\left|\mathcal{P}_\circ(\mathbb{N})\right| = \left|\mathbb{N}\right|$$

6 — Detto $\mathbb{R}$ l'insieme dei numeri reali, determinare una biiezione esplicita tra l'intervallo aperto e limitato $(-1, +1)$ in $\mathbb{R}$ e l'insieme $\mathbb{R}$ stesso.

7 — Dimostrare che per ogni $a, b \in \mathbb{N}$ tali che $a \leq b$, esiste

$$\forall\ a,b \in \mathbb{N}\ :\ a \leq b\ ,\quad \exists!\ c \in \mathbb{N}\ :\ c + a\ =\ b$$

Suggerimento: Si proceda per induzione (debole) su b.

8 — Si consideri la funzione "valore assoluto" $|\cdot| : \mathbb{Z} \twoheadrightarrow \mathbb{N}$ definita da

$$\left| z \right| \ := \begin{cases} z\ , & \text{se}\ \ z > \\ 0\ , & \text{se}\ \ z = 0 \\ -z\ , & \text{se}\ \ z < 0 \end{cases}$$

Dimostrare che per ogni $x, y \in \mathbb{Z}$ si ha:

(a) $\quad |x+y| \ \leq\ |x| + |y|$;

(b) $\quad |x \cdot y| \ =\ |x| \cdot |y|$.

9 — Sia $\delta_{\mathbb{Z}}$ la relazione di "divisibilità" nell'insieme $\mathbb{Z}$ dei numeri interi — denotata più semplicemente con "$\big|$" quando non ci sia ambiguità — definita da

$$z'\,\delta_{\mathbb{Z}}\,z'' \quad \overset{\Delta}{\Longleftrightarrow} \quad \exists\ d \in \mathbb{Z}\ :\ d\,z' = z'' \qquad\qquad \big(\,\forall\ \ z', z'' \in \mathbb{Z}\,\big)$$

Dimostrare che $\delta_{\mathbb{Z}}$ è una relazione di *preordine* (cioè è riflessiva e transitiva) ma *non* di ordine (cioè non è anche antisimmetrica).

10 — Nell'insieme $\mathbb{Z}$ dei numeri interi, sia $U(\mathbb{Z}) := \big\{\, \varepsilon \in \mathbb{Z} \;\big|\; \exists\ \eta \in \mathbb{Z}\ :\ \varepsilon\,\eta = 1 \,\big\}$ l'insieme dei numeri interi *invertibili* (o *"unità"* di $\mathbb{Z}$). Dimostrare che:

(a) $\quad 1 \in U(\mathbb{Z})$;

(b) $\quad U(\mathbb{Z}) \cdot U(\mathbb{Z}) = U(\mathbb{Z})$, $\quad$ dove $\quad U(\mathbb{Z}) \cdot U(\mathbb{Z}) := \big\{\, \varepsilon' \cdot \varepsilon'' \,\big|\, \varepsilon', \varepsilon'' \in U(\mathbb{Z}) \,\big\}$;

(c) $\quad$ se $\varepsilon \in U(\mathbb{Z})$ con $\varepsilon\,\eta = 1$ (con $\eta \in \mathbb{Z}$), $\quad$ allora $\eta \in U(\mathbb{Z})$.

11 — Nell'insieme $\mathbb{Z}$ dei numeri interi, sia $U(\mathbb{Z}) := \big\{\, \varepsilon \in \mathbb{Z} \;\big|\; \exists\ \eta \in \mathbb{Z}\ :\ \varepsilon\,\eta = 1 \,\big\}$ l'insieme dei numeri interi *invertibili*, e si consideri la relazione $\sim$ definita da

$$z' \sim z'' \quad \overset{\Delta}{\Longleftrightarrow} \quad \exists\ \varepsilon \in U(\mathbb{Z})\ :\ z' = \varepsilon\, z'' \qquad\qquad \big(\,\forall\ \ z', z'' \in \mathbb{Z}\,\big)$$

(a) Dimostrare che $\sim$ è una relazione di *equivalenza*.

(b) Dimostrare che $\sim\ = \delta_{\mathbb{Z}} \cap \delta_{\mathbb{Z}}^{-1}$, $\quad$ dove $\delta_{\mathbb{Z}}$ è la relazione di divisibilità introdotta nell'esercizio **9** qui sopra.

Suggerimento: È tutto una verifica diretta: per la parte (b), si sfrutti il fatto che $\mathbb{Z}$ è privo di divisori di zero per dimostrare l'inclusione "$\supseteq$" (l'altra segue dalle definizioni).

12 — Nell'insieme $\mathbb{Z}$ dei numeri interi, sia $U(\mathbb{Z}) := \big\{\, \varepsilon \in \mathbb{Z} \;\big|\; \exists\ \eta \in \mathbb{Z}\ :\ \varepsilon\,\eta = 1 \,\big\}$ l'insieme dei numeri interi *invertibili*. Dimostrare che $U(\mathbb{Z}) \ =\ \{\, +1\,, -1 \}$.

Suggerimento: Utilizzare la proprietà $\big| x \cdot y \big| \ =\ \big| x \big| \cdot \big| y \big|$ — per ogni $x, y \in \mathbb{Z}$ — insieme al fatto che il solo numero naturale $n \in \mathbb{N}$ che sia invertibile (in $\mathbb{N}$) è $n = 1$.