ALGEBRA e LOGICA
CdL in Ingegneria Informatica

prof. Fabio GAVARINI

a.a. 2016–2017 — Sessione Autunnale, II appello

Esame scritto del 22 Settembre 2017

....

N.B.: compilare il compito in modo sintetico ma **esauriente**, *spiegando chiaramente quanto si fa, e scrivendo in corsivo con grafia leggibile.*

.... $*$ ....

[1] Determinare tutti i numeri interi $x \in \mathbb{Z}$ per i quali si abbia *simultaneamente*

$$-93 \cdot x \equiv 378 \pmod{15} \qquad \text{e} \qquad [215]_7 \cdot [x]_7 = -[24]_7 \quad \big(\text{in } \mathbb{Z}_7\big)$$

[2] Si considerino i numeri naturali $M := 750486^{6457}$ e $N := 750483^{6455}$.

(a) Calcolare il resto della divisione di N per 20 .

(b) Determinare se esistano nell'anello $\mathbb{Z}_{20}$ degli interi modulo 20 le classi $\overline{M}^{\,-1}$ e $\overline{N}^{\,-1}$ inverse della classe $\overline{M} := [M]_{20}$ e della classe $\overline{N} := [N]_{20}$ rispettivamente. In caso negativo, si spieghi perché una tale classe inversa non esista; in caso affermativo, si calcoli esplicitamente la classe inversa in questione.

[3] Nell'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali si consideri la relazione $\lessdot$ definita da

$$h \lessdot k \iff \Big|\big\{\, x \in \{2,5\} \,\big|\, x\,\delta_{\mathbb{N}}\, h \,\big\}\Big| \leq \Big|\big\{\, y \in \{2,5\} \,\big|\, y\,\delta_{\mathbb{N}}\, k \,\big\}\Big| \qquad \forall\; h,k \in \mathbb{N}$$

dove $\delta_{\mathbb{N}}$ indica la consueta relazione di divisibilità in $\mathbb{N}$.

(a) Dimostrare che la relazione $\lessdot$ è una relazione di preordine in $\mathbb{N}$.

(b) Dimostrare che la relazione $\lessdot$ *non* è una relazione di ordine in $\mathbb{N}$.

(c) Dimostrare che la relazione $\lessdot\!\!\gtrdot := \lessdot \cap \gtrdot = \lessdot \cap \lessdot^{-1}$ è una relazione di equivalenza in $\mathbb{N}$.

(d) Determinare la cardinalità dell'insieme quoziente $\Big| \mathbb{N} \big/ \lessdot\!\!\gtrdot \Big|$.

(e) Descrivere esplicitamente le cinque classi di $\lessdot\!\!\gtrdot$ –equivalenza $[28]_{\lessdot\!\gtrdot}$, $[15]_{\lessdot\!\gtrdot}$, $[21]_{\lessdot\!\gtrdot}$, $[38]_{\lessdot\!\gtrdot}$ e $[30]_{\lessdot\!\gtrdot}$.

(continua...)

[4] Dimostrare *per induzione* che per ogni $n \in \mathbb{N}_+$ vale l'identità

$$\sum_{s=1}^{n} (2\,s-1) \;=\; n^2$$

[5] Dato l'insieme $\mathbb{T} := \{\,18\,,3\,,70\,,1\,,10\,,630\,,14\,\}$, si consideri in esso la relazione (d'ordine) di divisibilità, indicata qui di seguito con δ.

(a) Verificare che l'insieme ordinato $\big(\mathbb{T}\,;\delta\big)$ è un reticolo, scrivendo esplicitamente tutti i valori $\sup(x,y)$ e $\inf(x,y)$ per ogni $x,y \in \mathbb{T}$.

(b) Determinare il minimo, il massimo, tutti gli atomi e tutti gli elementi $\vee$–irriducibili del reticolo $\mathbb{T}$.

(c) Determinare se esista una $\vee$–fattorizzazione non ridondante in *fattori $\vee$–irriducibili* per l'elemento 630 nel reticolo $\mathbb{T}$. In caso affermativo, si determini esplicitamente (almeno) una tale $\vee$–fattorizzazione; in caso negativo, si spieghi perché essa non esista.

(d) Determinare se esista una $\vee$–fattorizzazione non ridondante in *atomi* per l'elemento 630 nel reticolo $\mathbb{T}$. In caso affermativo, si determini esplicitamente (almeno) una tale $\vee$–fattorizzazione; in caso negativo, si spieghi perché essa non esista.

(e) Stabilire, giustificando adeguatamente la risposta, se il reticolo $\big(\mathbb{T}\,;\delta\big)$ sia un'algebra di Boole oppure no.