

**ALGEBRA e LOGICA**  
**CdL in Ingegneria Informatica**  
*prof. Fabio GAVARINI*

*a.a. 2016–2017 — Sessione Estiva Anticipata, II appello*

Esame scritto del 21 Febbraio 2017

.....

*N.B.: compilare il compito in modo sintetico ma **esauriente**, spiegando  
chiaramente quanto si fa, e scrivendo in corsivo con grafia leggibile.*

.....  $\mathcal{B}$  .....

[1] Dato l'insieme  $\{J, Q, K, A\}$ , si consideri il corrispondente insieme delle parti  $\mathbb{B} := \mathcal{P}(\{J, Q, K, A\})$ . Si considerino poi in  $\mathbb{B} := \mathcal{P}(\{J, Q, K, A\})$  le due relazioni  $\rho$  e  $\eta$  così definite:

$$\begin{aligned} X\rho Y &\iff X \cap Y \neq \emptyset & \forall X, Y \in \mathbb{B} \\ X\eta Y &\iff X \cap \{J, K\} = Y \cap \{J, K\} & \forall X, Y \in \mathbb{B} \end{aligned}$$

- (a) Dimostrare che la relazione  $\rho$  è simmetrica.
- (b) Dimostrare che la relazione  $\rho$  non è riflessiva.
- (c) Dimostrare che la relazione  $\rho$  non è transitiva.
- (d) Dimostrare che  $\eta$  è una relazione di equivalenza.
- (e) Descrivere esplicitamente tutte le classi di  $\eta$ -equivalenza in  $\mathbb{B}$ .

[2] Risolvere il sistema di equazioni congruenziali

$$\circledast : \begin{cases} -27x \equiv 28^{591} & (\text{mod } 5) \\ 53x \equiv 419 & (\text{mod } 8) \end{cases}$$

[3] (a) Dimostrare che per ogni  $n \in \mathbb{N}$  vale la disuguaglianza

$$5^n \geq 1 + 4n$$

(b) Calcolare l'espressione in base QUATTRO del numero  $N$  la cui scrittura in base CINQUE è  $N = (1030)_{\text{CINQUE}}$ .

(continua...)

[4] (a) Si considerino i seguenti polinomi booleani

$$p(h, k, \ell) := ((k \wedge h) \wedge (h \wedge \ell)') \vee ((h \wedge k)' \wedge (\ell \wedge h))$$

$$q(h, k, \ell) := (h \wedge \ell)' \wedge (\ell \vee h) \quad , \quad d(h, k, \ell) := h \wedge ((\ell \wedge k)' \wedge (k \vee \ell))$$

nelle tre variabili booleane  $h, k, \ell$ .

- (a) Dimostrare che  $d(h, k, \ell) \sim p(h, k, \ell)$ .
- (b) Calcolare la *Forma Normale Disgiuntiva* del polinomio  $q(h, k, \ell)$ .
- (c) Calcolare una *forma minimale* del polinomio  $q(h, k, \ell)$ .

[5] Si consideri la relazione di divisibilità tra numeri naturali, indicata con  $\delta$ , e sia  $D_{770} := \{d \in \mathbb{N} \mid d \delta 770\}$  l'insieme dei divisori di 770, che è un insieme ordinato rispetto alla (restrizione della) suddetta relazione di divisibilità  $\delta$ . Sia poi

$$\mathbb{M} := \{1, 2, 5, 11, 55, 70, 110, 770\}$$

un sottoinsieme di  $D_{770}$ , a sua volta dotato della relazione d'ordine (indotta)  $\delta$ .

(a) Esiste un *minimo* in  $(D_{770}; \delta)$ ? In caso negativo, spiegare perché; in caso affermativo, precisare quale sia tale minimo, e descrivere l'insieme  $\mathcal{A}_{D_{770}}$  degli *atomi* di  $D_{770}$ .

(b) L'insieme ordinato  $(D_{770}; \delta)$  è un'algebra di Boole? In caso negativo, si spieghi esattamente perché; in caso affermativo, si descriva esplicitamente l'isomorfismo di algebre di Boole

$$\Phi : (\mathcal{P}(\mathcal{A}_{D_{770}}); \subseteq) \hookrightarrow (D_{770}; \delta)$$

costruito nella dimostrazione del Teorema di Rappresentazione di Stone.

(c) Disegnare il diagramma di Hasse dell'insieme ordinato  $(\mathbb{M}; \delta)$ .

(d) L'insieme ordinato  $(\mathbb{M}; \delta)$  è un'algebra di Boole? È un reticolo? In ciascun caso, si giustifichi adeguatamente la risposta.