

ALGEBRA e LOGICA
CdL in Ingegneria Informatica
prof. Fabio GAVARINI

a.a. 2016–2017 — Sessione Estiva Anticipata, II appello
Esame scritto del 21 Febbraio 2017

.....

*N.B.: compilare il compito in modo sintetico ma **esauriente**, spiegando chiaramente quanto si fa, e scrivendo in corsivo con grafia leggibile.*

..... \mathcal{R}

[1] Dato l'insieme $\{S, P, Q, R\}$, si consideri il corrispondente insieme delle parti $\mathbb{F} := \mathcal{P}(\{S, P, Q, R\})$. Si considerino poi in $\mathbb{F} := \mathcal{P}(\{S, P, Q, R\})$ le due relazioni ρ e η così definite:

$$\begin{aligned} X\rho Y &\iff X \cap Y \neq \emptyset & \forall X, Y \in \mathbb{F} \\ X\eta Y &\iff X \cap \{P, R\} = Y \cap \{P, R\} & \forall X, Y \in \mathbb{F} \end{aligned}$$

- (a) Dimostrare che la relazione ρ è simmetrica.
- (b) Dimostrare che la relazione ρ non è riflessiva.
- (c) Dimostrare che la relazione ρ non è transitiva.
- (d) Dimostrare che η è una relazione di equivalenza.
- (e) Descrivere esplicitamente tutte le classi di η -equivalenza in \mathbb{F} .

[2] Risolvere il sistema di equazioni congruenziali

$$\circledast : \begin{cases} -25x \equiv 14^{64938} & (\text{mod } 11) \\ 47x \equiv 436 & (\text{mod } 6) \end{cases}$$

[3] (a) Dimostrare che per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale la disuguaglianza

$$4^n - 1 \geq 3n$$

(b) Calcolare l'espressione in base QUATTRO del numero N la cui scrittura in base CINQUE è $N = (1034)_{\text{CINQUE}}$.

(continua...)

[4] (a) Si considerino i seguenti polinomi booleani

$$p(u, v, w) := ((v \wedge w) \wedge (u \wedge w)') \vee ((w \wedge u) \wedge (v \wedge w)')$$

$$q(u, v, w) := (u \wedge w)' \wedge (w \vee u) \quad , \quad d(u, v, w) := w \wedge ((u \wedge v') \vee (u' \wedge v))$$

nelle tre variabili booleane u, v, w .

(a) Dimostrare che $p(u, v, w) \sim d(u, v, w)$.

(b) Calcolare la *Forma Normale Disgiuntiva* del polinomio $q(u, v, w)$.

(c) Calcolare una *forma minimale* del polinomio $q(u, v, w)$.

[5] Si consideri la relazione di divisibilità tra numeri naturali, indicata con δ , e sia $D_{330} := \{d \in \mathbb{N} \mid d \delta 330\}$ l'insieme dei divisori di 330, che è un insieme ordinato rispetto alla (restrizione della) suddetta relazione di divisibilità δ . Sia poi

$$\mathbb{K} := \{1, 2, 3, 5, 15, 30, 66, 330\}$$

un sottoinsieme di D_{330} , a sua volta dotato della relazione d'ordine (indotta) δ .

(a) Esiste un *minimo* in $(D_{330}; \delta)$? In caso negativo, spiegare perché; in caso affermativo, precisare quale sia tale minimo, e descrivere l'insieme $\mathcal{A}_{D_{330}}$ degli *atomi* di D_{330} .

(b) L'insieme ordinato $(D_{330}; \delta)$ è un'algebra di Boole? In caso negativo, si spieghi esattamente perché; in caso affermativo, si descriva esplicitamente l'isomorfismo di algebre di Boole

$$\Phi : (\mathcal{P}(\mathcal{A}_{D_{330}}); \subseteq) \longleftrightarrow (D_{330}; \delta)$$

costruito nella dimostrazione del Teorema di Rappresentazione di Stone.

(c) Disegnare il diagramma di Hasse dell'insieme ordinato $(\mathbb{K}; \delta)$.

(d) L'insieme ordinato $(\mathbb{K}; \delta)$ è un'algebra di Boole? È un reticolo? In ciascun caso, si giustifichi adeguatamente la risposta.