

ALGEBRA e LOGICA
CdL in Ingegneria Informatica
prof. Fabio GAVARINI

a.a. 2016–2017 — Sessione Estiva Anticipata, II appello

Esame scritto del 21 Febbraio 2017

.....

*N.B.: compilare il compito in modo sintetico ma **esauriente**, spiegando
chiaramente quanto si fa, e scrivendo in corsivo con grafia leggibile.*

..... \mathcal{G}

[1] Dato l'insieme $\{\heartsuit, \spadesuit, \clubsuit, \diamondsuit\}$, si consideri il corrispondente insieme delle parti $\mathbb{G} := \mathcal{P}(\{\heartsuit, \spadesuit, \clubsuit, \diamondsuit\})$. Si considerino poi in $\mathbb{G} := \mathcal{P}(\{\heartsuit, \spadesuit, \clubsuit, \diamondsuit\})$ le due relazioni ρ e η così definite:

$$\begin{aligned} X\rho Y &\iff X \cap Y \neq \emptyset & \forall X, Y \in \mathbb{G} \\ X\eta Y &\iff X \cap \{\heartsuit, \diamondsuit\} = Y \cap \{\heartsuit, \diamondsuit\} & \forall X, Y \in \mathbb{G} \end{aligned}$$

- (a) Dimostrare che la relazione ρ è simmetrica.
- (b) Dimostrare che la relazione ρ non è riflessiva.
- (c) Dimostrare che la relazione ρ non è transitiva.
- (d) Dimostrare che η è una relazione di equivalenza.
- (e) Descrivere esplicitamente tutte le classi di η -equivalenza in \mathbb{G} .

[2] Risolvere il sistema di equazioni congruenziali

$$\circledast : \begin{cases} -23x \equiv 18^{578} & (\text{mod } 7) \\ 61x \equiv 384 & (\text{mod } 8) \end{cases}$$

[3] (a) Dimostrare che per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale la disuguaglianza

$$2n - 3^n \leq -1$$

(b) Calcolare l'espressione in base QUATTRO del numero N la cui scrittura in base CINQUE è $N = (422)_{\text{CINQUE}}$.

(continua...)

[4] (a) Si considerino i seguenti polinomi booleani

$$p(a, b, c) := ((a \vee b) \wedge (a \wedge b)') \wedge c \quad , \quad q(a, b, c) := (b \wedge a)' \wedge (a \vee b) \\ d(a, b, c) := ((c \wedge b)' \wedge (a \wedge c)) \vee ((b \wedge c) \wedge (c \wedge a)')$$

nelle tre variabili booleane a, b, c .

(a) Dimostrare che $p(a, b, c) \sim d(a, b, c)$.

(b) Calcolare la *Forma Normale Disgiuntiva* del polinomio $q(a, b, c)$.

(c) Calcolare una *forma minimale* del polinomio $q(a, b, c)$.

[5] Si consideri la relazione di divisibilità tra numeri naturali, indicata con δ , e sia $D_{210} := \{d \in \mathbb{N} \mid d \delta 210\}$ l'insieme dei divisori di 210, che è un insieme ordinato rispetto alla (restrizione della) suddetta relazione di divisibilità δ . Sia poi

$$\mathbb{H} := \{1, 2, 3, 7, 21, 30, 42, 210\}$$

un sottoinsieme di D_{210} , a sua volta dotato della relazione d'ordine (indotta) δ .

(a) Esiste un *minimo* in $(D_{210}; \delta)$? In caso negativo, spiegare perché; in caso affermativo, precisare quale sia tale minimo, e descrivere l'insieme $\mathcal{A}_{D_{210}}$ degli *atomi* di D_{210} .

(b) L'insieme ordinato $(D_{210}; \delta)$ è un'algebra di Boole? In caso negativo, si spieghi esattamente perché; in caso affermativo, si descriva esplicitamente l'isomorfismo di algebre di Boole

$$\Phi : (\mathcal{P}(\mathcal{A}_{D_{210}}); \subseteq) \longleftrightarrow (D_{210}; \delta)$$

costruito nella dimostrazione del Teorema di Rappresentazione di Stone.

(c) Disegnare il diagramma di Hasse dell'insieme ordinato $(\mathbb{H}; \delta)$.

(d) L'insieme ordinato $(\mathbb{H}; \delta)$ è un'algebra di Boole? È un reticolo? In ciascun caso, si giustifichi adeguatamente la risposta.