ALGEBRA e LOGICA

CdL in Ingegneria Informatica

proff. Fabio GAVARINI / Andrea SANTI

a.a. 2021–2022 — Sessione Invernale, I appello

Esame scritto del 7 Febbraio 2023

.....

N.B.: compilare il compito in modo sintetico ma esauriente, spiegando chiaramente quanto si fa, e scrivendo in corsivo con grafia leggibile.

..... *

[1] Dimostrare per induzione (debole) che il numero $A(n) := n^2 - n$ è pari, per ogni $n \in \mathbb{N}$.

[2] Si consideri il polinomio booleano nelle tre variabili x, y, z dato da

$$P(x, y, z) := \left(((y \wedge x) \wedge (x \wedge z)') \vee ((y \wedge x)' \wedge (z \wedge x)) \right) \vee \\ \vee \left((z \wedge y \wedge x)' \vee z' \vee y \right)' \vee (x \wedge z \wedge y)$$

(a) Determinare la forma normale disgiuntiva $D(x, y, z)$ del polinomio $P(x, y, z)$.

(b) Determinare una forma minimale $Q(x, y, z)$ del polinomio $P(x, y, z)$.

(c) Determinare la grandezza $G_f := (E_f, F_f)$ per ciascuno dei due polinomi $f := D(x, y, z)$ e $f := Q(x, y, z)$.

[3] Nell'insieme $\mathbb{Z}$ dei numeri interi si consideri la relazione ϑ definita da

$$a \vartheta c \iff a^2 - c^2 = 4c - 4a \quad \forall a, c \in \mathbb{Z}$$

(a) Dimostrare che la relazione ϑ è un'equivalenza in $\mathbb{Z}$.

(b) Descrivere esplicitamente la classe di ϑ -equivalenza $[0]_{\vartheta}$ di 0.

(c) Determinare la descrizione esplicita della generica classe di ϑ -equivalenza $[z]_{\vartheta}$ di un qualunque numero intero $z \in \mathbb{Z}$.

[4] Determinare l'insieme di tutti i numeri interi che risolvano simultaneamente le tre equazioni modulari

$$\begin{aligned} [81]_{11} \cdot [x]_{11} &= -[71]_{11} && \text{in } \mathbb{Z}_{11} \\ [143]_{55} \cdot [x]_{55} &= -[209]_{55} && \text{in } \mathbb{Z}_{55} \\ [287]_{41} \cdot [x]_{41} &= [369]_{41} && \text{in } \mathbb{Z}_{41} \end{aligned}$$

[5] Determinare il resto di 1035^{4095} nella divisione per 21.

[6] Sia $(\mathbb{F}; \preceq)$ l'insieme ordinato in cui $\mathbb{F} := \{15, 2, 90, 30, 10, 1, 6, 45, 3\}$ e la relazione d'ordine è la relazione di *divisibilità* $\preceq := \delta$ tra numeri naturali.

(a) Disegnare il diagramma di Hasse dell'insieme ordinato $(\mathbb{F}; \preceq)$.

(b) Verificare che l'insieme ordinato $(\mathbb{F}; \preceq)$ è un reticolo, precisando esplicitamente chi siano $\sup_{\preceq}(a, b)$ e $\inf_{\preceq}(a, b)$ per ogni possibile scelta di $a, b \in \mathbb{F}$ tali che $a \not\preceq b$ e $b \not\preceq a$.

(c) Determinare se esista $\sup_{\preceq}(\{10, 2, 6, 15, 3\})$ in $(\mathbb{F}; \preceq)$; in caso negativo, si spieghi perché tale estremo superiore non esista; in caso positivo, si precisi esplicitamente quale sia tale estremo superiore.

(d) Determinare tutti gli elementi $\vee$ -irriducibili e tutti gli atomi del reticolo $(\mathbb{F}; \preceq)$.

(e) Determinare, giustificando opportunamente la risposta, se il reticolo $(\mathbb{F}; \preceq)$ sia un'algebra di Boole oppure no.