

ALGEBRA e LOGICA

CdL in Ingegneria Informatica

proff. Fabio GAVARINI / Andrea SANTI

a.a. 2021–2022 — Sessione Autunnale, II appello

Esame scritto del 12 Settembre 2022

.....

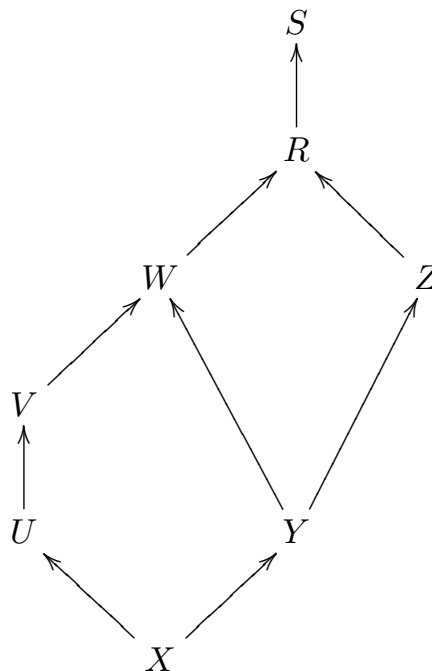
N.B.: compilare il compito in modo sintetico ma **esauriente**, spiegando chiaramente quanto si fa, e scrivendo in *corsivo* con grafia leggibile.

.....

[1] Dimostrare che per ogni $n \in \mathbb{N}_+$ vale l'identità

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} = 1 - \frac{1}{2^n}$$

[2] Sia $(\mathbb{F}; \preceq)$ l'insieme ordinato in cui $\mathbb{F} := \{S, R, X, Y, Z, U, V, W\}$ e la relazione d'ordine $\preceq$ è determinata dal seguente diagramma di Hasse:



(a) Verificare che l'insieme ordinato $(\mathbb{F}; \preceq)$ è un reticolo, precisando esplicitamente chi siano $\sup_{\preceq}(a, b)$ e $\inf_{\preceq}(a, b)$ per ogni possibile scelta di $a, b \in \mathbb{F}$ tali che $a \not\preceq b$ e $b \not\preceq a$;

(b) Determinare, giustificando opportunamente la risposta, se il reticolo $(\mathbb{F}; \preceq)$ é un'algebra di Boole oppure no;

(c) Determinare un sottoinsieme di $\mathbb{F}$ che *non* sia un sottoreticolo;

(d) Determinare un sottoreticolo di $(\mathbb{F}; \preceq)$ che contenga esattamente quattro elementi e che sia (come reticolo in sé stesso) un'algebra di Boole.

[3] Determinare il resto di 2^{1006} nella divisione per 192.

[4] Sia X un insieme non vuoto, e sia $\leq$ una relazione in X che sia un “preordine”, cioè sia riflessiva e transitiva. Si consideri poi la relazione $\diamond$ in X definita da

$$u \diamond v \iff (u \leq v) \wedge (v \leq u) \quad \forall u, v \in X$$

(a) Dimostrare che $\diamond$ è una relazione di equivalenza in X .

(b) Dimostrare che $\diamond$ è la relazione identità (in X) se e soltanto se la relazione $\leq$ è una relazione d'ordine.

[5] Si consideri il numero $n \in \mathbb{N}$ che in base OTTO è espresso dalla scrittura posizionale $n = (540372)_{\text{OTTO}}$. Posto $d_1 := 9$, $d_2 := 8$, $d_3 := 7$, per ogni $i \in \{1, 2, 3\}$ si determini il numero $r_i \in \mathbb{N}$ tale che $n \equiv r_i \pmod{d_i}$ e $0 \leq r_i \leq d_i - 1$.

[6] Si consideri il polinomio booleano nelle tre variabili x, y, z dato da

$$P(x, y, z) := y \wedge (z' \vee 1' \vee y \vee z) \wedge \left((y \wedge 1)' \vee z \vee (x \wedge z' \wedge x') \vee x'' \right) \wedge \left(z' \vee \left(1' \vee (z' \wedge y')' \right)' \vee (0' \wedge z) \right)$$

(a) Determinare una forma minimale $Q(x, y, z)$ del polinomio $P(x, y, z)$.

(b) Determinare la forma normale disgiuntiva $D(x, y, z)$ del polinomio $P(x, y, z)$.

(c) Determinare la grandezza $G_f := (E_f, F_f)$ per ciascuno dei due polinomi $f := Q(x, y, z)$ e $f := D(x, y, z)$.