

ALGEBRA e LOGICA

CdL in Ingegneria Informatica

proff. Fabio GAVARINI / Andrea SANTI

a.a. 2021–2022 — Sessione Autunnale, I appello

Esame scritto del 30 Agosto 2022

.....

N.B.: compilare il compito in modo sintetico ma **esauriente**, spiegando chiaramente quanto si fa, e scrivendo in *corsivo* con grafia leggibile.

.....

[1] Sfruttando esplicitamente il Principio di Induzione Debole, dimostrare che

$$4^{2n+1} + 3^{n+2} \equiv 0 \pmod{13} \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}$$

[2] Consideriamo l'insieme $\mathbb{E} := \{\clubsuit, \diamond, \heartsuit, \spadesuit\}$, il suo sottoinsieme $\mathbb{E}_0 := \{\clubsuit, \heartsuit\}$ e l'insieme delle parti $\mathcal{P}(\mathbb{E})$ di $\mathbb{E}$. Consideriamo in $\mathcal{P}(\mathbb{E})$ la relazione η data da

$$\mathbb{E}' \eta \mathbb{E}'' \iff \mathbb{E}' \cap \mathbb{E}_0 = \mathbb{E}'' \cap \mathbb{E}_0 \quad \forall \mathbb{E}', \mathbb{E}'' \in \mathcal{P}(\mathbb{E})$$

(a) Si dimostri che la relazione η è un'equivalenza.

(b) Si descrivano esplicitamente tutte le classi di η -equivalenza in $\mathcal{P}(\mathbb{E})$.

[3] Determinare tutti i numeri interi $x \in \mathbb{Z}$ che soddisfino simultaneamente tutte le seguenti condizioni:

$$\begin{aligned} 152x \equiv_9 83 \quad \text{in } \mathbb{Z} \quad , \quad [111]_{13}[x]_{13} &= [504]_{13} \quad \text{in } \mathbb{Z}_{13} \\ \exists y \in \mathbb{Z} : 50x + 8y &= 110 \quad \text{in } \mathbb{Z} \end{aligned}$$

[4] (a) Calcolare, se esiste, la classe $\overline{23}^{-1}$ inversa di $\overline{23}$ nell'anello unitario $\mathbb{Z}_{14}$ delle classi resto modulo 14; se invece tale classe non esiste, se ne spieghi il motivo.

(b) Nell'anello (unitario) $\mathbb{Z}_{14}$ delle classi resto modulo 14, determinare il sottoinsieme di tutte le classi invertibili (rispetto alla moltiplicazione).

(continua...)

[5] Sia $(D_{54}; \delta)$ il reticolo dei divisori di 54, dove δ indica la relazione di divisibilità (tra numeri naturali).

(a) Disegnare il diagramma di Hasse di $(D_{54}; \delta)$.

(b) Determinare tutti gli elementi $\vee$ -irriducibili e tutti gli atomi del reticolo $(D_{54}; \delta)$.

(c) Per ogni elemento riducibile di $(D_{54}; \delta)$, si esibiscano esplicitamente tutte le sue $\vee$ -fattorizzazioni non ridondanti in $\vee$ -irriducibili.

(d) Motivando opportunamente la risposta, determinare se il reticolo $(D_{54}; \delta)$ sia un'algebra di Boole oppure no.

(e) Sia S il sottoinsieme di D_{54} definito da $S := D_{54} \setminus \{18, 27\}$. Allora:

(e.1) S è un sottoreticolo del reticolo $(D_{54}; \delta)$?

(e.2) L'insieme S , dotato della relazione d'ordine (di divisibilità) indotta dal reticolo $(D_{54}; \delta)$, è a sua volta un reticolo?

[6] Sia $(B, \vee, \wedge)$ un'algebra di Boole. Dati due qualsiasi elementi $p, q \in B$, si definisca la loro *differenza simmetrica*, indicata con $p \oplus q$ ($\in B$), in due modi alternativi, come segue:

$$p \oplus q := \begin{cases} (p \vee q) \wedge (p \wedge q)' \\ (p \wedge q') \vee (p' \wedge q) \end{cases}$$

Si dimostri che:

(a) la differenza simmetrica $p \oplus q$ è ben definita, cioè effettivamente si ha sempre $(p \vee q) \wedge (p \wedge q)' = (p \wedge q') \vee (p' \wedge q)$;

(b) la differenza simmetrica " $\oplus$ " è un'operazione associativa.

(*Suggerimento:* si riduca separatamente ciascuno dei due termini della relazione di associatività ad una "somma di prodotti fondamentali completi")