ALGEBRA e LOGICA

CdL in Ingegneria Informatica

proff. Fabio GAVARINI / Andrea SANTI

a.a. 2021–2022 — Sessione Estiva, I appello

Esame scritto del 21 Giugno 2022

. . . .

N.B.: compilare il compito in modo <u>*sintetico*</u> *ma* **esauriente***, spiegando chiaramente quanto si fa, e scrivendo in* corsivo *con grafia leggibile.*

. . . .

[1] Dimostrare che $\sum_{h=0}^{n}(4\,h+1) \;=\; (2\,n+1)\,(n+1)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

[2] Dati due insiemi A e B, si consideri l'insieme $B^A := \{\, f : A \longrightarrow B \,\}$ di tutte le funzioni da A a B. Si fissi un sottoinsieme A_0 in A, e relativamente ad esso si consideri la relazione $\asymp$ nell'insieme B^A definita da

$$f' \asymp f'' \quad\iff\quad f'(a_0) = f''(a_0) \;\; \forall\, a_0 \in A_0 \qquad\qquad \Big(\forall\; f', f'' \in B^A\Big)$$

(a) Dimostrare che la relazione $\asymp$ è una equivalenza in B^A.

(b) Si fissino insiemi a propria scelta A, B e A_0 $\big(\subseteq A\big)$ tali che $|A| = 5$, $|B| = 3$ e $\big|A_0\big| = 2$: per tale scelta, si determinino esplicitamente:

(b.1) due funzioni $h', h'' \in B^A$ tali che $h' \neq h''$ e $h' \asymp h''$,

(b.2) due funzioni $k', k'' \in B^A$ tali che $k' \not\asymp k''$.

[3] Determinare l'insieme di tutti i numeri interi che risolvano simultaneamente le tre seguenti equazioni modulari:

$$\begin{aligned} [95]_7 \cdot [x]_7 &= -[456]_7 && \text{in } \mathbb{Z}_7 \\ -[154]_{21} \cdot [x]_{21} &= [56]_{21} && \text{in } \mathbb{Z}_{21} \\ [231]_{11} \cdot [x]_{11} &= [583]_{11} && \text{in } \mathbb{Z}_{11} \end{aligned}$$

[4] Sia $\big(D_{80}\,;\delta\big)$ il reticolo dei divisori di 80, con la relazione di divisibilità δ.

(a) Disegnare il diagramma di Hasse dell'insieme ordinato $\big(D_{80}\,;\delta\big)$.

(b) Determinare tutti gli elementi $\vee$–irriducibili e tutti gli atomi di $\big(D_{80}\,;\delta\big)$.

(c) Per ogni elemento di D_{80}, esibire esplicitamente tutte le sue $\vee$–fattorizzazioni non ridondanti in $\vee$–irriducibili. Per quali elementi esiste una tale $\vee$–fattorizzazione che sia in atomi?

(d) Determinare un sottoinsieme di D_{80} che *non* sia un sottoreticolo di $\big(D_{80}\,;\delta\big)$.

(e) Determinare un sottoinsieme di D_{80} che sia un sottoreticolo di $\big(D_{80}\,;\delta\big)$ e che *non* sia un'algebra di Boole.

(f) Determinare quattro sottoreticoli di $\big(D_{80}\,;\delta\big)$ che contengano almeno tre elementi e che siano algebre di Boole. In ognuno dei quattro casi, determinare esplicitamente l'elemento massimo e l'elemento minimo del sottoreticolo in esame.

[5] Scrivere in base QUATTRO il numero $k \in \mathbb{N}$ che in base OTTO è espresso dalla scrittura posizionale $k = (5703)_{\text{OTTO}}$.

[6] Si consideri il polinomio Booleano $P(x,y,z)$ nelle tre variabili x, y, z dato da

$$\begin{aligned} P(x,y,z) \;&=\; \Big(\big(x \vee z \vee 1'\,\big) \wedge \big(x \vee y \vee 0\big) \wedge \big((z \wedge 1)' \vee z'' \vee y''\,\big)\Big)' \vee \\ &\qquad \vee \Big(\big(z' \wedge \big(1 \vee y''\,\big) \wedge (z \vee x)'\big) \vee \big(\big(x'' \wedge z \wedge z'\,\big)' \wedge \big(y \vee x'\,\big)' \wedge 0'\,\big)\Big) \end{aligned}$$

(a) Determinare una forma minimale $Q(x,y,z)$ del polinomio $P(x,y,z)$.

(b) Determinare la forma normale disgiuntiva $D(x,y,z)$ del polinomio $P(x,y,z)$.

(c) Determinare la grandezza $G_f := \big(E_f\,,F_f\big)$ per i due polinomi $f = Q(x,y,z)$ e $f = D(x,y,z)$.