

**ALGEBRA e LOGICA**  
**CdL in Ingegneria Informatica**

*prof. Fabio GAVARINI*

*a.a. 2020–2021 — Sessione Invernale, II appello*

Esame scritto del 21 Febbraio 2022

.....

*N.B.: compilare il compito in modo sintetico ma **esauriente**, spiegando  
chiaramente quanto si fa, e scrivendo in corsivo con grafia leggibile.*

.....

[1] Dato l'insieme  $\mathbb{E} := \{1, 5, 6, 7, 10, 25, 100, 4200\}$ , si consideri in esso la relazione d'ordine di divisibilità — indicata con  $\delta$  — per la quale  $(\mathbb{E}; \delta)$  è un insieme ordinato.

(a) Disegnare il diagramma di Hasse dell'insieme ordinato  $(\mathbb{E}; \delta)$ .

(b) Verificare che l'insieme ordinato  $(\mathbb{E}; \delta)$  è un reticolo, scrivendo esplicitamente tutti i valori  $\sup(x, y)$  e  $\inf(x, y)$  per ogni possibile scelta di  $x, y \in \mathbb{E}$ .

(c) Determinare tutti gli atomi e tutti gli elementi  $\vee$ -irriducibili del reticolo  $\mathbb{E}$ .

(d) Determinare se esista una  $\vee$ -fattorizzazione non ridondante in *fattori  $\vee$ -irriducibili* per l'elemento 4200 nel reticolo  $\mathbb{E}$ . Se la risposta è negativa, si spieghi perché una tale  $\vee$ -fattorizzazione non esista; se invece la risposta è positiva, si determini esplicitamente una tale  $\vee$ -fattorizzazione, si spieghi se essa è unica, e in caso negativo se ne determini esplicitamente un'altra.

(e) Determinare se nel reticolo  $\mathbb{E}$  esistano un complemento per l'elemento 5 e un complemento per l'elemento 7. In ciascuno dei due casi, se la risposta è affermativa, si determini esplicitamente un tale complemento; se invece è negativa, si spieghi perché un tale complemento non esista.

(f) Determinare, motivando adeguatamente la risposta, se il reticolo  $(\mathbb{E}; \delta)$  sia distributivo oppure no.

(g) Determinare, motivando adeguatamente la risposta, se il reticolo  $(\mathbb{E}; \delta)$  sia un'algebra di Boole oppure no.

[2] Scrivere in base CINQUE il numero  $N \in \mathbb{N}$  che in base DIECI è espresso da

$$N = (70529)_{\text{DIECI}}$$

[3] Determinare tutti i valori di  $x \in \mathbb{Z}$  tali che

$$65763^{347} \cdot x \equiv -329 \pmod{21} \quad \& \quad -13 \leq x \leq +17$$

[4] Sia  $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$  la funzione definita da  $n \mapsto f(n) := 3n^2 - 2n - 9$  (per ogni  $n \in \mathbb{N}$ ). Utilizzando il *Principio di Induzione (Semplice)* su  $n$ , si dimostri che

$$\mathcal{P}(n) : f(n) < f(n+1) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

[5] Dato l'insieme  $E := \{\heartsuit, \spadesuit, \clubsuit, \diamondsuit\}$  e il suo insieme delle parti  $\mathcal{P}(E)$ , consideriamo in  $\mathcal{P}(E)$  la relazione  $\eta$  definita da

$$E' \eta E'' \iff |E'| = |E''| \quad \forall E', E'' \in \mathcal{P}(E)$$

(a) Dimostrare che la relazione  $\eta$  è una equivalenza.

(b) Descrivere esplicitamente tutte le  $\eta$ -classi di equivalenza in  $\mathcal{P}(E)$ .

[6] Risolvere il sistema di congruenze lineari in  $\mathbb{Z}$

$$\begin{cases} 712x \equiv -361 & (\text{mod } 5) \\ -49x \equiv 37 & (\text{mod } 8) \\ 75x \equiv 51 & (\text{mod } 21) \end{cases}$$


---