

**ALGEBRA e LOGICA**  
**CdL in Ingegneria Informatica**

*prof. Fabio GAVARINI*

*a.a. 2020–2021 — Sessione Invernale, I appello*

Esame scritto del 7 Febbraio 2022

.....

*N.B.: compilare il compito in modo sintetico ma **esauriente**, spiegando  
chiaramente quanto si fa, e scrivendo in *corsivo* con grafia leggibile.*

.....

[1] Dimostrare che per ogni  $n \in \mathbb{N}$  con  $n > 1$  si ha

$$\prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$$

[2] Siano  $A$  un insieme, e siano  $\Omega := A^A = \{f : A \longrightarrow A\}$  l'insieme di tutte le funzioni da  $A$  in sé stesso e  $\mathcal{S}(A)$  l'insieme di tutte le biiezioni da  $A$  in sé stesso. Si definisca in  $\Omega$  la relazione  $\sim$  data da

$$h \sim k \iff \exists \phi \in \mathcal{S}(A) : k = h \circ \phi \qquad \forall h, k \in \Omega$$

(a) Dimostrare che la relazione  $\sim$  è una equivalenza in  $\Omega$ .

(b) Dimostrare che se  $h, k \in \Omega$  sono *iniettive*, allora si ha

$$h \sim k \iff |\text{Im}(h)| = |\text{Im}(k)|$$

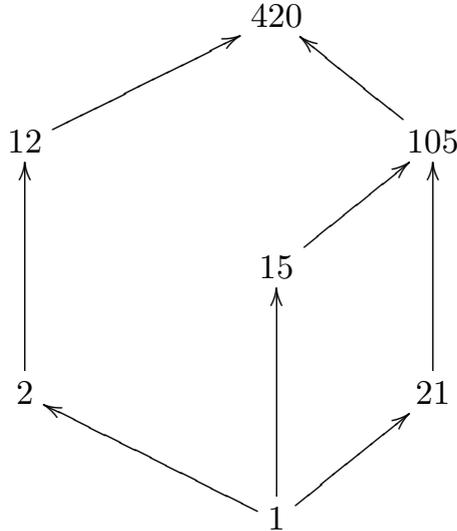
[3] Determinare tutte le coppie  $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$  tali che  $x^{512} - 512y \equiv 0 \pmod{7}$ .

[4] Determinare tutti i numeri interi  $x \in \mathbb{Z}$  per i quali si abbia *simultaneamente*

$$[222]_7 \cdot [x]_7 = -[31]_7 \quad (\text{in } \mathbb{Z}_7) \qquad \text{e} \qquad [-108]_{15} \cdot [x]_{15} = [348]_{15} \quad (\text{in } \mathbb{Z}_{15})$$

*(continua...)*

[5] Dato l'insieme  $\mathbb{H} := \{1, 2, 12, 15, 21, 105, 420\}$ , si consideri in esso la relazione d'ordine  $\preceq$  descritta dal seguente diagramma di Hasse:



(a) Verificare che l'insieme ordinato  $(\mathbb{H}; \preceq)$  è un reticolo, scrivendo esplicitamente tutti i valori  $\sup(x, y)$  e  $\inf(x, y)$  per ogni possibile scelta di  $x, y \in \mathbb{H}$ .

(b) Determinare il minimo, il massimo, tutti gli atomi e tutti gli elementi  $\vee$ -irriducibili del reticolo  $\mathbb{H}$ .

(c) Determinare se esista una  $\vee$ -fattorizzazione non ridondante in *fattori*  $\vee$ -irriducibili per l'elemento 420 nel reticolo  $\mathbb{H}$ . Se la risposta è affermativa, si determini esplicitamente (almeno) una tale  $\vee$ -fattorizzazione; se invece è negativa, si spieghi perché essa non esista.

(d) Determinare se esista una  $\vee$ -fattorizzazione non ridondante in *atomi* per l'elemento 420 nel reticolo  $\mathbb{H}$ . Se la risposta è affermativa, si determini esplicitamente (almeno) una tale  $\vee$ -fattorizzazione; se invece è negativa, si spieghi perché essa non esista.

(e) Determinare se esista una  $\vee$ -fattorizzazione non ridondante in *fattori*  $\vee$ -irriducibili e/o in *atomi* per l'elemento 105 in  $\mathbb{H}$ . Per ciascuna delle due richieste, se la risposta è affermativa, si determini esplicitamente (almeno) una tale  $\vee$ -fattorizzazione; se invece è negativa, si spieghi perché essa non esista.

(f) Stabilire, motivando adeguatamente la risposta, se il reticolo  $(\mathbb{H}; \preceq)$  sia un'algebra di Boole oppure no.