

ALGEBRA e LOGICA
CdL in Ingegneria Informatica
prof. Fabio GAVARINI

a.a. 2020–2021 — Sessione Estiva, II appello

Esame scritto dell'8 Luglio 2021

.....

*N.B.: compilare il compito in modo sintetico ma **esauriente**, spiegando
chiaramente quanto si fa, e scrivendo in corsivo con grafia leggibile.*

..... ‡

- [1] Si consideri il polinomio booleano — nelle tre variabili a, b e c — dato da
- $$Q(a, b, c) := \left((b' \vee a \vee b') \wedge (c' \vee (b' \wedge a) \vee 1' \vee a) \right)' \vee \left((b' \vee c \vee a' \vee (b \wedge c)) \wedge (c' \wedge b \wedge a') \right)'$$
- (a) Determinare la *forma normale disgiuntiva* di Q .
- (b) Utilizzando il *Metodo del Consenso*, determinare la *somma di tutti gli implicanti primi* di Q .
- (c) Dimostrare che per le due terne $(0, 1, 0)$ e $(0, 1, 1)$ il polinomio Q assume valore $Q(0, 1, 0) = 1$ e $Q(0, 1, 1) = 1$.

[2] Determinare l'insieme di tutte le soluzioni in \mathbb{Z} del sistema di equazioni congruenziali

$$(*) : \begin{cases} -24x \equiv 6066^{354936} \pmod{7} \\ 271x \equiv -47 \pmod{5} \end{cases}$$

[3] Sia $\mathbb{N}_\uparrow := \{ n \in \mathbb{N} \mid n > 1 \}$ l'insieme dei numeri naturali maggiori di 1, e si considerino in esso la relazione d'ordine standard, indicata con \leq , e la relazione di divisibilità, indicata con δ , che sappiamo essere entrambe relazioni d'ordine.

Nell'insieme $\mathbb{N}_\uparrow^2 = \mathbb{N}_\uparrow \times \mathbb{N}_\uparrow$ consideriamo la relazione \sqsubseteq definita da

$$(a', b') \sqsubseteq (a'', b'') \iff (a' \leq a'') \ \& \ (b' \delta b'') \quad \forall (a', b'), (a'', b'') \in \mathbb{N}_\uparrow^2$$

- (a) Dimostrare che la relazione \sqsubseteq non è una relazione di equivalenza.
- (b) Dimostrare che la relazione \sqsubseteq è una relazione di ordine.
- (c) Dimostrare che la relazione d'ordine \sqsubseteq non è totale.
- (d) Determinare (se esistono), eventuali elementi massimali e elementi minimali nell'insieme ordinato $(\mathbb{N}_\uparrow^2; \sqsubseteq)$.
- (e) Determinare, se esiste, il massimo e il minimo in $(\mathbb{N}_\uparrow^2; \sqsubseteq)$, oppure dimostrare che tale elemento (massimo e/o minimo) non esiste.

[4] Sia $a := 1005$ e $b := 1011$.

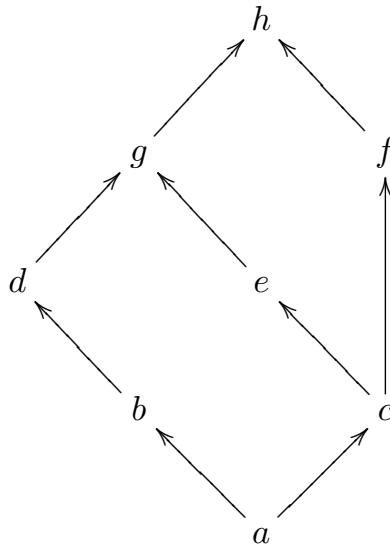
(a) Trovare, se esiste, una coppia di interi $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ che sia soluzione della equazione diofantea $ax + by = 21$

(b) Trovare, se esiste, una coppia di interi $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ che sia soluzione della equazione diofantea $ax + by = 20$

(c) Determinare il $\text{MCD}(a, b)$.

(d) Determinare il $\text{mcm}(a, b)$.

[5] Sia $(\mathbb{E}; \preceq)$ l'insieme ordinato in cui $\mathbb{E} := \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ e la relazione d'ordine \preceq è determinata dal diagramma di Hasse



(a) Si verifichi che l'insieme ordinato $(\mathbb{E}; \preceq)$ è un reticolo, precisando esplicitamente chi siano $\sup_{\preceq}(x, y)$ e $\inf_{\preceq}(x, y)$ per ogni scelta di $x, y \in \mathbb{E}$ tali che $x \not\preceq y$ e $y \not\preceq x$.

(b) Determinare, motivando opportunamente la risposta, se il reticolo $(\mathbb{E}; \preceq)$ sia un'algebra di Boole oppure no.

(c) Determinare se esista un numero $n \in \mathbb{N}$ tale che il reticolo $(\mathbb{E}; \preceq)$ sia isomorfo ad un sottoreticolo del reticolo $(D_n; \delta)$ dei divisori di n .