

ALGEBRA e LOGICA
CdL in Ingegneria Informatica
prof. Fabio GAVARINI

a.a. 2020–2021 — Sessione Estiva, II appello

Esame scritto dell'8 Luglio 2021

.....

*N.B.: compilare il compito in modo sintetico ma **esauriente**, spiegando
chiaramente quanto si fa, e scrivendo in corsivo con grafia leggibile.*

..... b

[1] Si consideri il polinomio booleano — nelle tre variabili x, y e z — dato da

$$P(x, y, z) := \left((x \wedge z \wedge y')' \wedge (z' \vee x' \vee y' \vee (z \wedge x')) \right)' \vee \left((z' \vee y \vee z') \wedge (x \vee (z' \wedge y) \vee 1' \vee y) \right)'$$

(a) Calcolare la *forma normale disgiuntiva* di P .

(b) Facendo uso del *Metodo del Consenso*, si calcoli la *somma di tutti gli implicanti primi* di P .

(c) Dimostrare che per le terne $(1, 0, 1)$ e $(0, 0, 1)$ il polinomio P assume rispettivamente i valori $P(1, 0, 1) = 1$ e $P(0, 0, 1) = 1$.

[2] Determinare l'insieme di tutte le soluzioni in \mathbb{Z} del sistema di equazioni congruenziali

$$(*) : \begin{cases} -17x \equiv 6080^{354927} \pmod{7} \\ 281x \equiv -42 \pmod{5} \end{cases}$$

[3] Sia $\mathbb{N}_\uparrow := \{ n \in \mathbb{N} \mid n > 1 \}$ l'insieme dei numeri naturali maggiori di 1, e si considerino in esso la relazione d'ordine standard, indicata con \leq , e la relazione di divisibilità, indicata con δ , che sappiamo essere entrambe relazioni d'ordine.

Nell'insieme $\mathbb{N}_\uparrow^2 = \mathbb{N}_\uparrow \times \mathbb{N}_\uparrow$ consideriamo la relazione \dashv definita da

$$(a', b') \dashv (a'', b'') \iff (a' \delta a'') \& (b' \leq b'') \quad \forall (a', b'), (a'', b'') \in \mathbb{N}_\uparrow^2$$

(a) Si dimostri che la relazione \dashv *non* è una relazione di equivalenza.

(b) Si dimostri che la relazione \dashv è una relazione di ordine.

(c) Si dimostri che la relazione d'ordine \dashv *non* è totale.

(d) Si determinino (se esistono), eventuali elementi massimali e elementi minimali nell'insieme ordinato $(\mathbb{N}_\uparrow^2; \dashv)$.

(e) Si determini, se esiste, il massimo e il minimo in $(\mathbb{N}_\uparrow^2; \dashv)$, oppure si dimostri che tale elemento (massimo e/o minimo) non esiste.

[4] Sia $a := 1011$ e $b := 1017$.

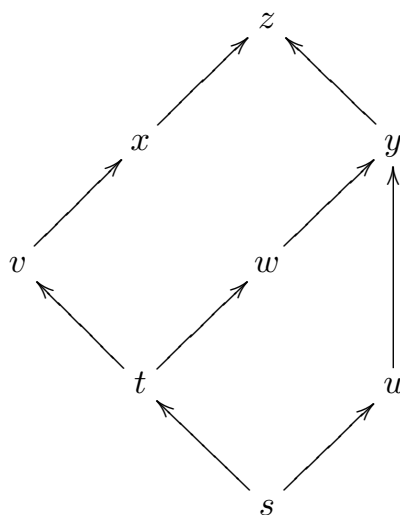
(a) Determinare — se esiste — una coppia di interi $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ che sia soluzione della equazione diofantea $ax + by = 23$

(b) Determinare — se esiste — una coppia di interi $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ che sia soluzione della equazione diofantea $ax + by = 24$

(c) Calcolare il $\text{MCD}(a, b)$.

(d) Calcolare il $\text{mcm}(a, b)$.

[5] Sia $(\mathbb{F}; \preceq)$ l'insieme ordinato in cui $\mathbb{F} := \{s, t, u, v, w, x, y, z\}$ e la relazione d'ordine \preceq è determinata dal diagramma di Hasse



(a) Verificare che l'insieme ordinato $(\mathbb{F}; \preceq)$ è un reticolo, precisando esplicitamente chi siano $\sup_{\preceq}(a, b)$ e $\inf_{\preceq}(a, b)$ per ogni scelta di $a, b \in \mathbb{F}$ tali che $a \not\preceq b$ e $b \not\preceq a$.

(b) Si determini, giustificando opportunamente la risposta, se il reticolo $(\mathbb{F}; \preceq)$ sia un'algebra di Boole oppure no.

(c) Stabilire se esista un numero $n \in \mathbb{N}$ per il quale il reticolo $(\mathbb{F}; \preceq)$ sia isomorfo ad un sottoreticolo del reticolo $(D_n; \delta)$ dei divisori di n .