

ALGEBRA e LOGICA
CdL in Ingegneria Informatica
prof. Fabio GAVARINI

a.a. 2020–2021 — Sessione Estiva, I appello

Esame scritto del 16 Giugno 2021

.....

*N.B.: compilare il compito in modo sintetico ma **esauriente**, spiegando
chiaramente quanto si fa, e scrivendo in corsivo con grafia leggibile.*

..... \otimes

[1] Si consideri in \mathbb{Z} (l'insieme dei numeri interi) la relazione η definita da

$$v \eta w \iff v^3 \equiv w^3 \pmod{13} \quad \forall v, w \in \mathbb{Z}$$

- (a) Si dimostri che η è una equivalenza.
- (b) Si determini il numero di η -classi di equivalenza distinte in \mathbb{Z} .
- (c) Si descriva esplicitamente l'insieme quoziente \mathbb{Z}/η .
- (d) Si descrivano esplicitamente tutte le η -classi di equivalenza in \mathbb{Z} .

[2] Calcolare l'insieme di tutte le soluzioni in \mathbb{Z} dell'equazione congruenziale

$$-99^{36038} x \equiv 44^{5491} \pmod{19}$$

[3] Si dimostri che per ogni $n \in \mathbb{N}_+$ si ha $\sum_{u=1}^n (2u)^2 = \sum_{v=1}^{2n} \frac{(v+1)v}{2}$.

[4] Si consideri il polinomio booleano — nelle tre variabili u, v e w — dato da

$$P(u, v, w) := \left((v' \vee 1' \vee v' \vee u' \vee v) \wedge (w' \vee (v \wedge (u \vee v) \wedge v') \vee v' \vee u') \right)' \vee \\ \vee \left((w' \vee 0'' \vee v' \vee u) \wedge (v \wedge u' \wedge v \wedge w) \right)'$$

- (a) Calcolare la *forma normale disgiuntiva* del polinomio P .
- (b) Stabilire, motivando adeguatamente la risposta, se la forma normale disgiuntiva di cui al punto (a) sia anche una *forma minimale* del polinomio P oppure no.

(continua...)

[5] A partire dall'insieme $\{T, O, N, E\}$, consideriamone l'insieme delle parti $\mathcal{P}(\{T, O, N, E\})$, munito della relazione (d'ordine) di inclusione.

Consideriamo poi il sottoinsieme \mathbb{F} di $\mathcal{P}(\{T, O, N, E\})$ dato da

$$\begin{aligned}\mathbb{F} &:= \mathcal{P}(\{T, O, N, E\}) \setminus \{\{O\}, \{T, E\}, \{O, N\}, \{N, E\}, \{T, O, E\}, \{O, N, E\}\} = \\ &= \{\emptyset, \{T\}, \{N\}, \{E\}, \{T, O\}, \{T, N\}, \{O, E\}, \\ &\quad \{T, O, N\}, \{T, N, E\}, \{T, O, N, E\}\}\end{aligned}$$

e dotato anch'esso della relazione (d'ordine) di inclusione, per la quale è un reticolo.

(a) Si disegni il diagramma di Hasse dell'insieme ordinato $(\mathbb{F}; \subseteq)$.

(b) Si verifichi che $(\mathbb{F}; \subseteq)$ non è un sottoreticolo di $(\mathcal{P}(\{T, O, N, E\}); \subseteq)$.

(c) Si determini se esista una \vee -fattorizzazione non ridondante in *fattori* \vee -irriducibili per l'elemento $\{T, O, N, E\}$ nel reticolo \mathbb{F} . In caso negativo, si spieghi perché tale \vee -fattorizzazione non esista; in caso affermativo, si determini esplicitamente una tale \vee -fattorizzazione, e se possibile se ne determini più di una.

(d) Si determini — motivando opportunamente la risposta — se il reticolo \mathbb{F} sia un'algebra di Boole oppure no.