ALGEBRA e LOGICA
CdL in Ingegneria Informatica
prof. Fabio GAVARINI

a.a. 2014–2015 — Sessione Autunnale, II appello
Esame scritto del 18 Settembre 2015

. . . .

N.B.: compilare il compito in modo sintetico ma **esauriente**, *spiegando chiaramente quanto si fa, e scrivendo in corsivo con grafia leggibile.*

. . . . ⋆ . . . .

[1] *(a)* Determinare — se esistono — tutte le successioni reali $\underline{a} := \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tali che

$$a_0 = 2 \quad , \quad a_2 = -10 \quad , \qquad a_n = a_{n-1} + 2\,a_{n-2} \qquad \forall\; n \geq 2$$

(b) Considerata l'unica successione reale $\underline{b} := \{b_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tale che

$$b_0 = 3 \quad , \quad b_1 = -1 \quad , \qquad b_n = b_{n-1} - 2\,b_{n-2} \qquad \forall\; n \geq 2 \quad ,$$

se ne determini il valore b_3 .

[2] *(a)* Fattorizzare i due numeri interi -990 e 132 in prodotto di fattori irriducibili.

(b) Calcolare $\mathrm{M.C.D.}(132\,, -990)$.

(c) Determinare una identità di Bézout per $\mathrm{M.C.D.}(132\,, -990)$.

(d) Determinare, se possibile, una soluzione per ciascuna delle due equazioni diofantee seguenti:

$$\textit{(d.1)} \quad -990\,x + 132\,y = 196 \quad , \qquad \textit{(d.2)} \quad -990\,x + 132\,y = -198$$

[3] *(a)* Scrivere in base $b' :=$ QUATTRO e in base $b'' :=$ DUE il numero L che in base $b :=$ OTTO è espresso dalla scrittura posizionale $L := \big(3471\big)_b$.

(b) Utilizzando la notazione posizionale in base $\beta :=$ TRE, calcolare la somma $N + M$ dove N ed M sono i due numeri naturali espressi in base β da

$$N := \big(12021\big)_\beta \qquad \text{e} \qquad M := \big(20102\big)_\beta$$

esprimendo a sua volta la suddetta somma con la scrittura posizionale in base $\beta :=$ TRE e con la scrittura posizionale in base $\beta' :=$ DIECI .

(continua...)

[4] Si consideri il reticolo D_{270} dei divisori di 270, con la usuale relazione d'ordine data dalla divisibilità.

(a) Determinare tutti gli atomi e tutti gli elementi $\vee$–irriducibili di D_{270}.

(b) Determinare una $\vee$–fattorizzazione non ridondante in fattori $\vee$–irriducibili per gli elementi $90, 54, 135 \in D_{270}$, se possibile; se invece non fosse possibile, se ne spieghi il perché.

(c) Stabilire, motivando la risposta, se D_{270} sia un'algebra di Boole oppure no.

(d) Determinare tutti gli elementi massimali e tutti gli elementi minimali del sottoinsieme ordinato $D' := D_{270} \setminus \{270\,,3\,,1\}$ di D_{270}.

(e) Si consideri il sottoinsieme ordinato $D'' := \{1\,,3\,,2\,,18\,,30\,,60\}$ di D_{270} (sempre rispetto alla relazione di divisibilità). È un reticolo?

[5] Si considerino in $\mathbb{Z}^2 := \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ le relazioni $\asymp$ e $\approx$ definite da

$$\big(a_1\,,b_1\big) \asymp \big(a_2\,,b_2\big) \quad \Longleftrightarrow \quad 7 \,\Big|\, \big(3\,a_1^2 + b_1 - 3\,a_2^2 - b_2\big)$$

e da

$$\big(a_1\,,b_1\big) \approx \big(a_2\,,b_2\big) \quad \Longleftrightarrow \quad 3\,a_1^2 + b_1 \equiv 3\,a_2^2 + b_2 \pmod{21}$$

per ogni $\big(a_1\,,b_1\big)\,,\big(a_2\,,b_2\big) \in \mathbb{Z}^2$.

(a) Si dimostri che la relazione $\asymp$ è una equivalenza in $\mathbb{Z}^2$.

(b) Si dimostri che la relazione $\approx$ è una equivalenza in $\mathbb{Z}^2$.

(c) Si dimostri che ogni classe di $\approx$–equivalenza — in $\mathbb{Z}^2$ — è contenuta in una e una sola classe di $\asymp$–equivalenza.