ALGEBRA e LOGICA

CdL in Ingegneria Informatica

prof. Fabio GAVARINI

a.a. 2016–2017 — Sessione Estiva, II appello

Esame scritto del 18 Luglio 2017

. . . .

N.B.: compilare il compito in modo sintetico ma **esauriente**, *spiegando chiaramente quanto si fa, e scrivendo in corsivo con grafia leggibile.*

. . . . * . . . .

[1] Per ogni $a \in \mathbb{Z}$, si consideri la funzione $f_a : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$ definita da $f_a(q) := a\,(a-2)\,q + 7$ per ogni $q \in \mathbb{Q}$; sia poi $f_a^{\mathbb{Z}} : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ la restrizione di f_a al sottoinsieme $\mathbb{Z}$ dei numeri interi — così $f_a^{\mathbb{Z}}(z) := a\,(a-2)\,z + 7\,,\ \forall\, z \in \mathbb{Z}$.

(a) Determinare tutti i valori di $a \in \mathbb{Z}$ per i quali la funzione f_a sia *iniettiva*.

(b) Determinare tutti i valori di $a \in \mathbb{Z}$ per i quali la funzione f_a sia *suriettiva*.

(c) Determinare tutti i valori di $a \in \mathbb{Z}$ per i quali la funzione $f_a^{\mathbb{Z}}$ sia *suriettiva*.

[2] Determinare tutte le soluzioni del sistema di equazioni congruenziali

$$\circledast : \begin{cases} -26\,x \equiv 2 & (\bmod 14) \\ \;\;33\,x \equiv -57 & (\bmod 30) \\ \;\;32\,x \equiv 44 & (\bmod 18) \end{cases}$$

[3] Sia $E := \mathcal{P}(\mathbb{N})$ l'insieme delle parti di $\mathbb{N}$, e si consideri in E la relazione "$\multimap$" definita da

$$F' \multimap F'' \iff \big|F'\big| \leq \big|F''\big| \qquad \forall\ F', F'' \in E$$

dove $\big|F\big|$ indica la cardinalità di un qualunque sottoinsieme F di $\mathbb{N}$.

(a) Dimostrare che la relazione $\multimap$ è *riflessiva*.

(b) Dimostrare che la relazione $\multimap$ è *transitiva*.

(c) Dimostrare che la relazione $\multimap$ *non è di equivalenza*.

(d) Dimostrare che la relazione $\multimap$ *non è d'ordine*.

(continua...)

[4] *(a)* Determinare — se esiste — il più piccolo valore di $x \in \mathbb{Z}$ tale che

$$x \equiv 543^{80431} \pmod{20} \qquad \text{e} \qquad 35 \leq x \leq 78$$

(b) Calcolare tutte le soluzioni dell'equazione modulare $\overline{-317}\,\overline{x} = \overline{543^{80431}}$ nell'anello $\mathbb{Z}_{20}$ delle classi resto modulo 20.

[5] Si consideri l'insieme $\mathbb{H} := \{\, 3\,, 1\,, 2\,, 6\,, 15\,, 10\,, 60\,, 30\,, 20\,\}$ ed in esso la relazione di divisibilità, indicata con δ, per la quale la coppia $\big(\mathbb{H}\,;\delta\big)$ costituisce un insieme ordinato. Si risolvano i seguenti problemi:

(a) L'insieme ordinato $\big(\mathbb{H}\,;\delta\big)$ è un'*algebra di Boole*? Perché?

(b) Disegnare il *diagramma di Hasse* dell'insieme ordinato $\big(\mathbb{H}\,;\delta\big)$.

(c) Esiste $\sup\big(\{\, 15\,, 3\,, 6\,, 10\,, 2\,\}\big)$ in $\big(\mathbb{H}\,;\delta\big)$? In caso negativo, spiegare perché; in caso affermativo, precisare quale sia tale estremo superiore.

(d) Dimostrare che $\big(\mathbb{H}\,;\delta\big)$ è un reticolo, *precisando i valori di* $a \vee b := sup\big(\{a, b\}\big)$ *e di* $a \wedge b := inf\big(\{a, b\}\big)$ in tutti i casi non banali (cioè quando $a \not\delta\, b$ e $b \not\delta\, a$, *evitando* di calcolare $b \vee a$ e $b \wedge a$ se quando si siano già calcolati $a \vee b$ e $a \wedge b$ ...).

(e) Esistono degli elementi $\vee$–*irriducibili* in $\big(\mathbb{H}\,;\delta\big)$? In caso negativo, spiegare perché non esistano; in caso affermativo, precisare quali siano.