

**ALGEBRA e LOGICA**  
**CdL in Ingegneria Informatica**  
*prof. Fabio GAVARINI*

*a.a. 2013-2014 — Sessione Estiva, II appello*

Esame scritto del 16 Luglio 2014 — compito §

.....

*N.B.: compilare il compito in modo sintetico ma **esauriente**, spiegando chiaramente quanto si fa, e scrivendo in corsivo con grafia leggibile.*

..... § .....

[1] Calcolare il resto  $r_1$  nella divisione di  $M_1 := 947^{70832}$  per 14 e il resto  $r_2$  nella divisione di  $M_2 := 907^{64972}$  per 21.

[2] Determinare l'insieme di tutte le soluzioni del sistema di equazioni congruenziali

$$(*) : \begin{cases} -61x \equiv 129 \pmod{4} \\ 133x \equiv -67 \pmod{9} \end{cases}$$

[3] Dimostrare per induzione i due fatti seguenti:

- (a)  $\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right) = n + 1$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$  con  $n > 0$  ;
- (b)  $2^{4n+1} + 7^{n+1} \equiv 0 \pmod{9}$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ .

[4] Si consideri il polinomio booleano  $Q(a, b, c)$ , nelle variabili  $a, b$  e  $c$ , dato da

$$Q(a, b, c) := (b'' \wedge (b \vee c') \wedge 0 \wedge a) \vee (b \wedge 0' \wedge c \wedge a) \vee (b \vee 1' \vee c \vee b'' \vee a)' \vee \\ \vee \left( (a' \wedge 1 \wedge b' \wedge c)' \wedge (b \vee c' \vee 0 \vee a') \right)' \vee \left( c'' \wedge b' \wedge ((a \vee c) \wedge b')' \wedge b \wedge a \right)$$

- (a) Determinare la *forma normale disgiuntiva* di  $Q$ .
- (b) Determinare la *somma di tutti gli implicanti primi* di  $Q$ .
- (c) Determinare una *forma minimale* di  $Q$ .

(continua...)

[5] (a) Determinare, se esistono, tutte le successioni reali  $\underline{a} := \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  tali che

$$a_0 = 2 \quad , \quad a_1 = 3 \quad , \quad a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2} \quad \forall \quad n \geq 2 \quad .$$

(b) Determinare, se esistono, tutte le successioni reali  $\underline{b} := \{b_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  tali che

$$b_0 = -1 \quad , \quad b_1 = -1 \quad , \quad b_2 = 3 \quad , \quad b_n = 6b_{n-1} - 9b_{n-2} \quad \forall \quad n \geq 2 \quad .$$

— ★ —

### SOLUZIONI

[1]  $r_1 = 11 \quad , \quad r_2 = 4 \quad .$

[2]  $x \equiv 11 \pmod{36}$ , o in altri termini  $x = 11 + 36z, \forall z \in \mathbb{Z}$ .

[3] N.B.: ricordo che la notazione  $\prod_{h=1}^s F_s$  significa semplicemente questo:

$$\prod_{h=1}^s F_h := F_1 \cdot F_2 \cdot F_3 \cdots F_{s-1} \cdot F_s$$

(a) *Base dell'induzione*:  $n = 1$ , per cui bisogna dimostrare che

$$\left( \prod_{k=1}^1 \left(1 + \frac{1}{k}\right) \right) = \left(1 + \frac{1}{1}\right) = 2$$

La verifica diretta dà  $\left(1 + \frac{1}{1}\right) = 1 + 1 = 2$ , e così la base dell'induzione è verificata.

*Passo induttivo*: bisogna dimostrare che, preso un qualunque valore di  $n$ , SE (*Ipotesi Induttiva*) la proprietà che ci interessa è vera per  $n$ , ALLORA è vera anche (*Tesi Induttiva*) per  $n + 1$ . Nel caso in esame, bisogna dimostrare che SE  $\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right) = n + 1$  ALLORA è anche  $\prod_{k=1}^{n+1} \left(1 + \frac{1}{k}\right) = (n + 1) + 1$ . La verifica diretta dà

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^{n+1} \left(1 + \frac{1}{k}\right) &= \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) = (n + 1) \cdot \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) = \\ &= (n + 1) \cdot \frac{(n+1)+1}{n+1} = (n + 1) + 1 \end{aligned}$$

(b) *Base dell'induzione*:  $n = 0$ , per cui bisogna dimostrare che  $2^{4 \cdot 0 + 1} + 7^{0+1} \equiv 0 \pmod{9}$

La verifica diretta dà  $2^{4 \cdot 0 + 1} + 7^{0 + 1} = 2 + 7 = 9 \equiv 0 \pmod{9}$ , e così la base dell'induzione è verificata.

*Passo induttivo:* bisogna dimostrare che, preso un qualunque valore di  $n$ , SE  $2^{4 \cdot n + 1} + 7^{n + 1} \equiv 0 \pmod{9}$  ALLORA è  $2^{4 \cdot (n+1) + 1} + 7^{(n+1) + 1} \equiv 0 \pmod{9}$ . La verifica diretta dà

$$\begin{aligned} 2^{4 \cdot (n+1) + 1} + 7^{(n+1) + 1} &= 2^{4 \cdot n + 4 + 1} + 7^{n + 1 + 1} = 2^{4 \cdot n + 1} \cdot 2^4 + 7^{n + 1} \cdot 7^1 = \\ &= 2^{4 \cdot n + 1} \cdot 16 + 7^{n + 1} \cdot 7 = 2^{4 \cdot n + 1} \cdot (7 + 9) + 7^{n + 1} \cdot 7 = \\ &= (2^{4 \cdot n + 1} \cdot 7 + 2^{4 \cdot n + 1} \cdot 9) + 7^{n + 1} \cdot 7 = 0 \cdot 7 + 2^{4 \cdot n + 1} \cdot 0 \pmod{9} \equiv 0 \pmod{9} \end{aligned}$$

$$[4] \quad (a) \quad F.N.D. = (a \wedge b \wedge c) \vee (a \wedge b' \wedge c) \vee (a' \wedge b' \wedge c) \vee (a \wedge b' \wedge c)$$

$$(b) \quad s.t.i.p. = (a \wedge c) \vee (a' \wedge b') \vee (b' \wedge c)$$

$$(c) \quad f.m. = (a \wedge c) \vee (a' \wedge b'), \quad \text{e questa è l'unica forma minimale possibile.}$$

[5] (a) Esiste una e una sola  $\underline{a} := \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  del tipo richiesto, data dalla formula  $a_n = (2 - n) \cdot 3^n, \forall n \in \mathbb{N}$ .

(b) Esiste una e una sola  $\underline{b} := \{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  del tipo richiesto, data dalla formula  $b_n = (2/3 n - 1) \cdot 3^n, \forall n \in \mathbb{N}$ , o anche  $b_n = (2n - 3) \cdot 3^{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}$ .

---