

ALGEBRA e LOGICA

CdL in Ingegneria Informatica — a.a. 2012/2013

prof. Fabio GAVARINI

Sessione Estiva Anticipata - I sessione / II appello

Esame scritto del 14 Febbraio 2013 — COMPITO P

.....

N.B.: compilare il compito in modo sintetico ma esauriente, spiegando chiaramente quanto si fa, e scrivendo in corsivo con grafia leggibile.

..... **P**

[1] (a) Calcolare — se esiste — la classe $\bar{z}^{-1} \in \mathbb{Z}_{100}$ inversa della classe $\bar{z} \in \mathbb{Z}_{100}$ per i casi $z := 242$ e $z := 27$.

(b) Risolvere l'equazione $\overline{-427} \cdot \bar{x} = \overline{213}$ in \mathbb{Z}_{100} .

(c) Risolvere l'equazione congruenziale $373 \cdot x \equiv 87 \pmod{100}$ in \mathbb{Z} .

[2] Si consideri il reticolo D_n dei divisori di n per i due valori $n := 315$ e $n := 165$.

(a) Determinare tutti gli atomi e tutti gli elementi \vee -irriducibili di D_{315} e di D_{165} .

(b) Determinare una \vee -fattorizzazione non ridondante in fattori \vee -irriducibili degli elementi $b := 45 \in D_{315}$, $d := 55 \in D_{165}$ e $q := 15 \in D_{165}$, se possibile; se invece non fosse possibile, se ne spieghi il perché.

(c) D_{315} è un'algebra di Boole? D_{165} è un'algebra di Boole? (*N.B.: spiegare!*)

(d) In ciascuno dei due casi $n := 315$ e $n := 165$ esiste un insieme X tale che D_n sia isomorfo (come reticolo) a $\mathcal{P}(X)$? In caso negativo, spiegare il perché; in caso affermativo, calcolare un isomorfismo esplicito (da D_n a $\mathcal{P}(X)$ o viceversa).

[3] Calcolare — se esistono — tutte le successioni $\underline{a} := \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ per le quali

$$a_0 = 1 \quad , \quad a_1 = -1 \quad , \quad a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2} \quad \forall \quad n \geq 2 \quad .$$

[4] Determinare tutte le soluzioni del sistema di equazioni congruenziali

$$\begin{cases} 195x \equiv 292 \pmod{7} \\ -215x \equiv 327 \pmod{8} \end{cases}$$

[5] Per $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ sia $\lceil x \rceil := \min \{n \in \mathbb{N} \mid x \leq n\}$ l'“arrotondamento superiore” di x . Sia \dashv la relazione (in $\mathbb{R}_{\geq 0}$) $x' \dashv x'' \iff \lceil x' \rceil \geq \lceil x'' \rceil$, per ogni $x', x'' \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Si dimostri che:

(a) la relazione \dashv è riflessiva e transitiva;

(b) la relazione \dashv non è antisimmetrica;

(c) esiste un $x_\infty \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ tale che $x \dashv x_\infty$ per ogni $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$;

(d) non esiste un $x_0 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ tale che $x_0 \dashv x$ per ogni $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$;

(e) la relazione \simeq in $\mathbb{R}_{\geq 0}$ definita da $x' \simeq x'' \iff (x' \dashv x'') \wedge (x'' \dashv x')$ è un'equivalenza.