

ALGEBRA e LOGICA

CdL in Ingegneria Informatica — a.a. 2012/2013

prof. Fabio GAVARINI

Sessione Estiva Anticipata - I sessione / II appello

Esame scritto del 14 Febbraio 2013 — COMPITO S

.....
N.B.: compilare il compito in modo sintetico ma esauriente, spiegando chiaramente quanto si fa, e scrivendo in corsivo con grafia leggibile.

..... **S**

[1] (a) Calcolare — se esiste — la classe $\bar{z}^{-1} \in \mathbb{Z}_{100}$ inversa della classe $\bar{z} \in \mathbb{Z}_{100}$ per i casi $z := 58$ e $z := 373$.

(b) Risolvere l'equazione $\overline{573} \cdot \bar{x} = -\overline{132}$ in \mathbb{Z}_{100} .

(c) Risolvere l'equazione congruenziale $-227 \cdot x \equiv 68 \pmod{100}$ in \mathbb{Z} .

[2] Si consideri il reticolo D_n dei divisori di n per i due valori $n := 308$ e $n := 231$.

(a) Determinare tutti gli atomi e tutti gli elementi \vee -irriducibili di D_{308} e di D_{231} .

(b) Determinare una \vee -fattorizzazione non ridondante in fattori \vee -irriducibili degli elementi $b := 28 \in D_{308}$, $d := 21 \in D_{231}$ e $q := 33 \in D_{231}$, se possibile; se invece non fosse possibile, se ne spieghi il perché.

(c) D_{308} è un'algebra di Boole? D_{231} è un'algebra di Boole? (*N.B.: spiegare!*)

(d) In ciascuno dei due casi $n := 308$ e $n := 231$ esiste un insieme X tale che D_n sia isomorfo (come reticolo) a $\mathcal{P}(X)$? In caso negativo, spiegare il perché; in caso affermativo, calcolare un isomorfismo esplicito (da D_n a $\mathcal{P}(X)$ o viceversa).

[3] Calcolare — se esistono — tutte le successioni $\underline{a} := \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ per le quali

$$a_0 = 2 \quad , \quad a_1 = -1 \quad , \quad a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2} \quad \forall \quad n \geq 2 \quad .$$

[4] Determinare tutte le soluzioni del sistema di equazioni congruenziali

$$\begin{cases} 129x \equiv -367 \pmod{5} \\ 204x \equiv 156 \pmod{9} \end{cases}$$

[5] Dato $n \in \mathbb{N}_+$, sia $\varphi(n) := \{p \in \mathbb{N}_+ \mid p \text{ è primo, } p \text{ divide } n\}$. Sia \leq la relazione in \mathbb{N}_+ definita così: $n' \leq n'' \iff \varphi(n') \subseteq \varphi(n'')$, per ogni $n', n'' \in \mathbb{N}_+$. Dimostrare che:

(a) la relazione \leq è riflessiva e transitiva;

(b) la relazione \leq non è antisimmetrica;

(c) esiste un $n_0 \in \mathbb{N}_+$ tale che $n_0 \leq n$ per ogni $n \in \mathbb{N}_+$;

(d) non esiste un $n_\infty \in \mathbb{N}_+$ tale che $n \leq n_\infty$ per ogni $n \in \mathbb{N}_+$;

(e) la relazione \approx in \mathbb{N}_+ definita da $\ell \approx m \iff (\ell \leq m) \wedge (m \leq \ell)$ è un'equivalenza.
