

# ALGEBRA e LOGICA

CdL in Ingegneria Informatica — a.a. 2012/2013

prof. Fabio GAVARINI

Sessione Estiva Anticipata - I sessione / II appello

Esame scritto del 14 Febbraio 2013 — COMPITO R

.....

*N.B.: compilare il compito in modo sintetico ma esauriente, spiegando chiaramente quanto si fa, e scrivendo in corsivo con grafia leggibile.*

..... **R** .....

[1] (a) Calcolare — se esiste — la classe  $\bar{z}^{-1} \in \mathbb{Z}_{100}$  inversa della classe  $\bar{z} \in \mathbb{Z}_{100}$  per i casi  $z := -435$  e  $z := 63$ .

(b) Risolvere l'equazione  $\overline{-563} \cdot \bar{x} = \overline{-908}$  in  $\mathbb{Z}_{100}$ .

(c) Risolvere l'equazione congruenziale  $437 \cdot x \equiv 192 \pmod{100}$  in  $\mathbb{Z}$ .

[2] Si consideri il reticolo  $D_n$  dei divisori di  $n$  per i due valori  $n := 294$  e  $n := 273$ .

(a) Determinare tutti gli atomi e tutti gli elementi  $\vee$ -irriducibili di  $D_{294}$  e di  $D_{273}$ .

(b) Determinare una  $\vee$ -fattorizzazione non ridondante in fattori  $\vee$ -irriducibili degli elementi  $b := 98 \in D_{294}$ ,  $d := 21 \in D_{273}$  e  $q := 39 \in D_{273}$ , se possibile; se invece non fosse possibile, se ne spieghi il perché.

(c)  $D_{294}$  è un'algebra di Boole?  $D_{273}$  è un'algebra di Boole? (*N.B.: spiegare!*)

(d) In ciascuno dei due casi  $n := 294$  e  $n := 273$  esiste un insieme  $X$  tale che  $D_n$  sia isomorfo (come reticolo) a  $\mathcal{P}(X)$ ? In caso negativo, spiegare il perché; in caso affermativo, calcolare un isomorfismo esplicito (da  $D_n$  a  $\mathcal{P}(X)$  o viceversa).

[3] Calcolare — se esistono — tutte le successioni  $\underline{a} := \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  per le quali

$$a_0 = -1 \quad , \quad a_1 = 1 \quad , \quad a_n = -6a_{n-1} - 9a_{n-2} \quad \forall n \geq 2 \quad .$$

[4] Determinare tutte le soluzioni del sistema di equazioni congruenziali

$$\begin{cases} 173x \equiv 246 \pmod{5} \\ 327x \equiv -219 \pmod{9} \end{cases}$$

[5] Dato  $\ell \in \mathbb{N}_+$ , sia  $\psi(\ell) := \{p \in \mathbb{N}_+ \mid p \text{ è primo, } p \text{ divide } \ell\}$ . Sia  $\triangleleft$  la relazione in  $\mathbb{N}_+$  definita così:  $\ell_1 \triangleleft \ell_2 \iff \psi(\ell_1) \subseteq \psi(\ell_2)$ , per ogni  $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{N}_+$ . Dimostrare che:

(a) la relazione  $\triangleleft$  è riflessiva e transitiva;

(b) la relazione  $\triangleleft$  non è antisimmetrica;

(c) esiste un  $\ell_{\downarrow} \in \mathbb{N}_+$  tale che  $\ell_{\downarrow} \triangleleft \ell$  per ogni  $\ell \in \mathbb{N}_+$ ;

(d) non esiste un  $\ell^{\uparrow} \in \mathbb{N}_+$  tale che  $\ell \triangleleft \ell^{\uparrow}$  per ogni  $\ell \in \mathbb{N}_+$ ;

(e) la relazione  $\asymp$  in  $\mathbb{N}_+$  definita da  $\ell_1 \asymp \ell_2 \iff (\ell_1 \triangleleft \ell_2) \wedge (\ell_2 \triangleleft \ell_1)$  è un'equivalenza.