

Esercizio 1. Scrivere una procedura MAPLE che implementi l'algoritmo d'illuminazione diretta nel caso in cui l'unica sorgente di luce presente nella scena sia un riflettore di Warn.

- Gli input della procedura sono $\mathbf{V}, \mathbf{x}, \mathbf{L}, \mathbf{L}', q, \mathbf{I}_p, \mathbf{K}_d(\mathbf{x}), K_s(\mathbf{x}), p(\mathbf{x}), \mathbf{N}(\mathbf{x})$ ovvero rispettivamente il punto di visuale, il punto in cui si vuole calcolare l'illuminazione diretta, il punto in cui è collocato il riflettore di Warn, il versore che indica la direzione di massima emissione del riflettore, l'esponente di Phong del riflettore, l'intensità RGB massima emessa dal riflettore in direzione $\mathbf{L}'$, il colore RGB in $\mathbf{x}$, il coefficiente di riflessione speculare in $\mathbf{x}$, l'esponente di Phong in $\mathbf{x}$, il versore normale esterno in $\mathbf{x}$. Si assuma che $\mathbf{x}$ sia visibile da $\mathbf{V}$ e dal punto $\mathbf{L}$ in cui si trova il riflettore.
- L'output della procedura è l'illuminazione diretta $\mathbf{I}^{\mathbf{V}}(\mathbf{x})$ percepita in $\mathbf{x}$ da un osservatore in $\mathbf{V}$.

Esercizio 2. Una scena si compone di due oggetti.

- Un triangolo T di vertici $(5, -5, 0), (5, 5, 0), (0, 0, 5)$, di colore RGB arancione $(1, \frac{2}{3}, 0)$, con coefficiente di riflessione speculare $\frac{1}{2}$ ed esponente di Phong 1.
- Un'ellissoide E di equazione $x^2 + 4y^2 + z^2 = 4$, di colore RGB ciano $(0, 1, 1)$, con coefficiente di riflessione speculare $\frac{3}{4}$ ed esponente di Phong 2.

L'unica sorgente di luce presente nella scena è un riflettore di Warn collocato in $\mathbf{L} = (0, 4, 0)$ avente esponente di Phong $\frac{1}{2}$, direzione normale data dal versore $\mathbf{L}' = (0, -1, 0)$ ed emissione massima in direzione $\mathbf{L}'$ d'intensità pari a $(1, 1, \frac{1}{2})$ (luce gialla chiara). L'osservatore si trova in $\mathbf{V} = (0, 3, 2)$ e guarda in direzione $(1, -2, -1)$.

- Determinare il colore che vede l'osservatore in base all'equazione d'illuminazione 0.
- Determinare il colore che vede l'osservatore in base all'equazione d'illuminazione 1.
- Immaginiamo che la scena debba essere resa sul piano di visuale $\{y = 2\}$ così come vista dal punto di visuale $\mathbf{V}$ in cui si trova l'osservatore e supponiamo idealmente che ogni punto del piano $\{y = 2\}$ sia un pixel. Determinare il colore che vede l'osservatore secondo l'algoritmo di Ray Tracing 1 e il pixel che viene colorato dal Ray Tracing 1 con tale colore.

Esercizio 3. Una scena consiste dell'interno di una capsula di arachide con una sola arachide dentro. Si tratta del solido ottenuto ruotando attorno all'asse orizzontale tratteggiato la sezione mostrata in Figura 1. Il risultato è una scena composta da due calotte sferiche C_1 e C_2 di raggio 3 i cui centri hanno distanza 4 e da una sfera S di raggio 1 concentrica a C_1 .

- Si calcoli il fattore di forma differenziale $F_{dC_1(\mathbf{x}), S}$ da un punto $\mathbf{x} \in C_1$ a S e si verifichi che esso non dipende dal punto $\mathbf{x}$ considerato.
- Si calcoli il fattore di forma $F_{C_1, S}$.
- Si calcoli la matrice dei fattori di forma F per la capsula di arachide prendendo come patch C_1, S, C_2 .
- Si assuma che:
 - l'arachide S è una sorgente di luce a potenza 1 per unità di area, mentre i gusci C_1 e C_2 non emettono luce propria;
 - la riflettività dell'arachide S è $\frac{2}{5}$ mentre quella dei due gusci C_1 e C_2 è $\frac{4}{5}$.
 Si scriva il sistema della radiosità $M\mathbf{b} = \mathbf{e}$ e se ne calcoli la soluzione esatta $\mathbf{b}$.
- Calcolare il raggio spettrale della matrice d'iterazione del metodo di Gauss-Seidel per il sistema della radiosità.
- Calcolare le prime 6 iterazioni del metodo di Gauss-Seidel per il sistema della radiosità partendo dal vettore d'innescio $\mathbf{b}^{(0)} = [0, 0, 0]^T$ e confrontarle con la soluzione esatta.

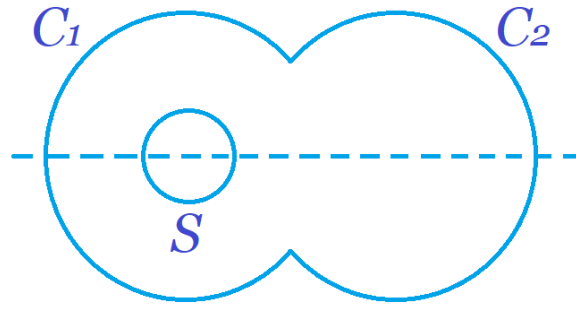


Figura 1: Illustrazione per l'Esercizio 3.

Esercizio 4. Una scena consiste dell'interno di una stanza a forma di parallelepipedo rettangolo di lunghezza 5, larghezza 4 e altezza 3. Il pavimento P della stanza è il rettangolo nel piano xy con $-2 \leq x \leq 2$ e $-\frac{5}{2} \leq y \leq \frac{5}{2}$.

- (i) Scrivere l'integrale che definisce il fattore di forma differenziale $\alpha = F_{dS(\mathbf{x}),P}$ dal centro $\mathbf{x} = (0, 0, 3)$ del soffitto S al pavimento P ed esprimerlo mediante le coordinate cartesiane (x, y) nel piano xy .
- (ii) Sia α_n lo stimatore di Monte Carlo di α basato su n campioni uniformi nel dominio d'integrazione relativo alle coordinate cartesiane (x, y) . Determinare un n tale che $\mathbb{P}(|\alpha_n - \alpha| < \varepsilon) \geq 1 - \delta$, dove $\varepsilon, \delta > 0$ sono fissati. Quanto vale n se $\varepsilon = 10^{-2}$ e $\delta = 10^{-1}$?

Esercizio 1. Scrivere una procedura MAPLE che implementi l'algoritmo d'illuminazione diretta nel caso in cui l'unica sorgente di luce presente nella scena sia una sorgente puntiforme e il modello d'illuminazione considerato sia quello monocromatico.

- Gli input della procedura sono $\mathbf{V}, \mathbf{x}, \mathbf{L}, I_p, K_d(\mathbf{x}), K_s(\mathbf{x}), p(\mathbf{x}), \mathbf{N}(\mathbf{x})$ ovvero rispettivamente il punto di visuale, il punto in cui si vuole calcolare l'illuminazione diretta, il punto in cui è collocata la sorgente, l'intensità (monocromatica) emessa dalla sorgente, il colore (monocromatico) in $\mathbf{x}$, il coefficiente di riflessione speculare in $\mathbf{x}$, l'esponente di Phong in $\mathbf{x}$, il versore normale esterno in $\mathbf{x}$. Si assuma che $\mathbf{x}$ sia visibile da $\mathbf{V}$ e dal punto $\mathbf{L}$ in cui si trova la sorgente.
- L'output della procedura è l'illuminazione diretta $I^V(\mathbf{x})$ percepita in $\mathbf{x}$ da un osservatore in $\mathbf{V}$.

Esercizio 2. [Questo problema è formulato nell'ambito del modello monocromatico in cui le intensità luminose delle sorgenti e i colori degli oggetti sono degli scalari in $[0, 1]$ che indicano diverse tonalità di grigio come nelle immagini in bianco e nero.] Una scena consiste dell'interno di una stanza cubica di lato 4 nel semispazio superiore $\{z \geq 0\}$ con il pavimento sul piano $\{z = 0\}$ ed i vertici del pavimento nei punti $(\pm 2, \pm 2, 0)$. Il soffitto della stanza è stato rimosso e sostituito da un tetto a forma di piramide con i vertici di base nei punti $(\pm 2, \pm 2, 4)$ e il vertice più alto in $(0, 0, 5)$. Dentro la stanza si trova una piramide con la base quadrata di vertici $(\pm 1, \pm 1, 0)$ e il vertice opposto in $(0, 0, 1)$. La piramide è di colore grigio chiaro pari a $\frac{4}{5}$ e ha coefficiente di riflessione speculare $\frac{1}{3}$ ed esponente di Phong 1. Il pavimento e le pareti della stanza sono di colore grigio un po' più scuro pari a $\frac{2}{3}$ e hanno coefficiente di riflessione speculare $\frac{1}{4}$ ed esponente di Phong $\frac{3}{4}$. Il tetto piramidale della stanza è di colore grigio ancora più scuro pari a $\frac{1}{2}$ e ha coefficiente di riflessione speculare $\frac{1}{5}$ ed esponente di Phong $\frac{3}{5}$. La stanza è illuminata da una sorgente di luce puntiforme collocata in $(0, 0, \frac{3}{2})$ d'intensità 1. Un osservatore si trova in $(0, \frac{3}{2}, \frac{1}{2})$ e guarda verso il punto $(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

- Determinare il colore che vede l'osservatore in base all'equazione d'illuminazione 0.
- Determinare il colore che vede l'osservatore in base all'equazione d'illuminazione 1.
- Determinare il colore che vede l'osservatore in base all'equazione d'illuminazione 2.
- Immaginiamo che la scena debba essere resa sul piano di visuale $\{y = -1\}$ così come vista dal punto di visuale $\mathbf{V}$ in cui si trova l'osservatore e supponiamo idealmente che ogni punto del piano $\{y = -1\}$ sia un pixel. Determinare il colore che vede l'osservatore secondo l'algoritmo di Ray Tracing 2 e il pixel che viene colorato dal Ray Tracing 2 con tale colore.

Esercizio 3. Consideriamo il tubo a forma di ferro di cavallo mostrato schematicamente in Figura 1 che consiste di 5 parti. Le parti A ed E sono dischi di raggio r , le parti B e D sono cilindri di raggio r e altezza m , mentre la parte C è un semitoro di raggi R e r .

- Si determini il fattore di forma differenziale dal centro di A a C .
- Utilizzando la suddivisione in 5 patch A, B, C, D, E , si determini la matrice F dei fattori di forma per il tubo in funzione di $a = F_{A,B}$.
- Determinare i valori di a che sono compatibili con il problema, cioè con le proprietà di essere compresi in $[0, 1]$, reciprocità e somma 1 dei fattori di forma.
- Supponiamo che $m = 3r = \frac{\pi}{3}R$ e che:
 - la patch A emette luce a potenza RGB $[1, 1, 1]$ per unità di area mentre le altre patch non emettono luce propria;
 - le patch A ed E sono blu con riflettività RGB $[0, 0, \frac{9}{10}]$, le patch B e D sono azzurre con riflettività RGB $[0, \frac{9}{10}, \frac{9}{10}]$, e la patch C è verde con riflettività RGB $[0, \frac{9}{10}, 0]$.
 Si determini il colore (la radiosità) di ogni patch del tubo in funzione di a .

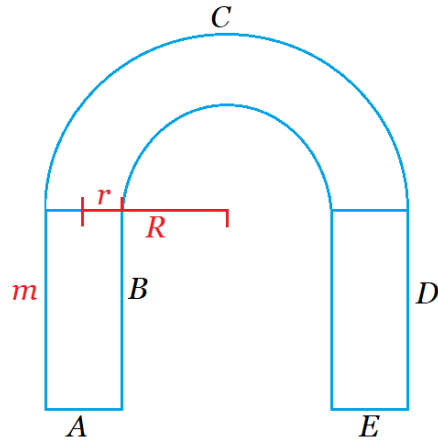


Figura 1: Illustrazione per l'Esercizio 3.

- (v) Nelle ipotesi del punto (iv), calcolare (in funzione di a) le prime 2 iterazioni del metodo di Gauss-Seidel per il sistema della radiosità nel blu partendo dal vettore d'innescio $\mathbf{b}_B^{(0)} = [0, 0, 0, 0, 0]^T$.
- (vi) Si calcoli il valore (approssimato) di a nel caso $m = 3r$ e si verifichi che esso è un numero puro che non dipende da r .

Esercizio 4. Si consideri la superficie S data dal grafico della funzione $f(x, y) = 2 - \sqrt{x^4 + y^4}$ per $(x, y) \in [-1, 1]^2$.

- (i) Disegnare con MAPLE la superficie S .
- (ii) Scrivere l'integrale che definisce il fattore di forma differenziale $\alpha = F_{dD(\mathbf{x}), S}$ dal punto $\mathbf{x} = (0, 0, -1)$, pensato come centro di un elemento infinitesimo $dD(\mathbf{x})$ disposto nel piano $\{z = -1\}$, alla superficie S ed esprimerlo mediante le coordinate cartesiane $(x, y) \in [-1, 1]^2$.
- (iii) Calcolare il valore (approssimato) di α .
- (iv) Sia α_n lo stimatore di Monte Carlo di α basato su n campioni uniformi nel dominio d'integrazione relativo alle coordinate cartesiane (x, y) . Determinare un n tale che $\mathbb{P}(|\alpha_n - \alpha| < \varepsilon) \geq 1 - \delta$, dove $\varepsilon, \delta > 0$ sono fissati. Quanto vale n se $\varepsilon = 10^{-2}$ e $\delta = 10^{-1}$?

Esercizio 1. Scrivere una procedura MAPLE che implementi l'algoritmo d'illuminazione diretta nel caso in cui il modello considerato sia quello monocromatico e nella scena siano presenti due sorgenti di luce puntiformi.

- Gli input della procedura sono $\mathbf{V}, \mathbf{x}, \mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2, I_{p_1}, I_{p_2}, K_d(\mathbf{x}), K_s(\mathbf{x}), p(\mathbf{x}), \mathbf{N}(\mathbf{x})$ ovvero rispettivamente il punto di visuale, il punto in cui si vuole calcolare l'illuminazione diretta, il punto in cui è collocata la prima sorgente, il punto in cui è collocata la seconda sorgente, l'intensità (monocromatica) della prima sorgente, l'intensità (monocromatica) della seconda sorgente, il colore (monocromatico) in $\mathbf{x}$, il coefficiente di riflessione speculare in $\mathbf{x}$, l'esponente di Phong in $\mathbf{x}$, il versore normale esterno in $\mathbf{x}$. Si assuma che $\mathbf{x}$ sia visibile da $\mathbf{V}$ e da entrambi i punti $\mathbf{L}_1$ e $\mathbf{L}_2$ in cui si trovano le sorgenti.
- L'output della procedura è l'illuminazione diretta $I^{\mathbf{V}}(\mathbf{x})$ percepita in $\mathbf{x}$ da un osservatore in $\mathbf{V}$.

Esercizio 2. [Questo problema è formulato nell'ambito del modello monocromatico in cui le intensità luminose delle sorgenti e i colori degli oggetti sono degli scalari in $[0, 1]$ che indicano diverse tonalità di grigio come nelle immagini in bianco e nero.] Consideriamo la superficie Σ data dal grafico della funzione $f(x, y) = x \sin y$ per $(x, y) \in [0, 1] \times [0, \pi]$.

(i) Disegnare con MAPLE la superficie Σ .

(ii) La superficie Σ è illuminata da due sorgenti puntiformi, una collocata in $\mathbf{L}_1 = (0, 0, 1)$ d'intensità $I_{p_1} = \frac{4}{5}$ e l'altra collocata in $\mathbf{L}_2 = (0, \pi, 1)$ d'intensità $I_{p_2} = \frac{3}{4}$. Il colore della superficie Σ nel suo generico punto $\mathbf{x} = (x, y, f(x, y))$ è dato da $K_d(\mathbf{x}) = x$. Il coefficiente di riflessione speculare e l'esponente di Phong di Σ sono rispettivamente $\frac{1}{2}$ e 2. Un osservatore si trova in $\mathbf{V} = (0, \frac{\pi}{2}, 1)$. Determinare l'illuminazione diretta percepita dall'osservatore nei punti della superficie Σ dati da $(x, y, f(x, y)) = (\frac{k}{m}, \frac{\pi}{2}, f(\frac{k}{m}, \frac{\pi}{2}))$ per $m = 10$ e $k = 0, \dots, m$.

Esercizio 3. [Questo problema è formulato nell'ambito del modello monocromatico in cui le intensità luminose delle sorgenti e i colori degli oggetti sono degli scalari in $[0, 1]$ che indicano diverse tonalità di grigio come nelle immagini in bianco e nero.] Una scena consiste dell'interno del tetraedro di vertici $(0, 0, 0)$, $(4, 0, 0)$, $(0, 4, 0)$, $(0, 0, 4)$. Tutte le pareti del tetraedro sono di colore $\frac{1}{2}$ e hanno coefficiente di riflessione speculare $\frac{1}{4}$ ed esponente di Phong 1. Una luce bianca d'intensità 1 si trova nell'origine. L'osservatore si trova in $\mathbf{V} = (1, 1, 1)$ e guarda verso il punto $\mathbf{x} = (\frac{5}{3}, \frac{5}{3}, \frac{2}{3})$.

- Dimostrare che $\mathbf{x}$ si trova sulla faccia del tetraedro che collega i vertici $(4, 0, 0)$, $(0, 4, 0)$, $(0, 0, 4)$.
- Determinare il colore che vede l'osservatore in base all'equazione d'illuminazione 0.
- Determinare il colore che vede l'osservatore in base all'equazione d'illuminazione 1.

Esercizio 4. Consideriamo l'ellisse nel piano $\{z = 0\}$ dato da

$$E = \left\{ (x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\},$$

dove $a, b > 0$ sono numeri assegnati (i semiassi dell'ellisse).

- Scrivere l'integrale che definisce il fattore di forma differenziale $F_{dA(\mathbf{x}), E}$ da $\mathbf{x} = (0, 0, 1)$ a E , pensando $\mathbf{x}$ come centro di un elemento infinitesimo $dA(\mathbf{x})$ disposto nel piano $\{z = 1\}$.
- Calcolare il valore (approssimato) di $F_{dA(\mathbf{x}), E}$ nel caso $a = 1$ e $b = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Esercizio 5. Consideriamo ancora la scena dell'Esercizio 3 ossia l'interno del tetraedro di vertici $(0, 0, 0)$, $(4, 0, 0)$, $(0, 4, 0)$, $(0, 0, 4)$. Indichiamo con 1, 2, 3 e 4 le facce del tetraedro che si trovano rispettivamente sul piano $\{x = 0\}$, sul piano $\{y = 0\}$, sul piano $\{z = 0\}$ e sul piano $\{x + y + z = 4\}$.

- (i) Prendendo come patch le facce 1, 2, 3, 4, si determini la matrice dei fattori di forma F per questa scena.
- (ii) Supponiamo che la faccia 4 emetta luce con potenza 1 per unità di area e abbia riflettività 0 mentre le altre facce hanno riflettività $\frac{1}{2}$. Si scriva il sistema della radiosità $M\mathbf{b} = \mathbf{e}$ e se ne calcoli la soluzione esatta $\mathbf{b}$.
- (iii) Dire quale fra i metodi di Jacobi e Gauss-Seidel applicati al sistema della radiosità converge più velocemente e motivare la risposta.
- (iv) Calcolare le prime 4 iterazioni dei metodi di Jacobi e Gauss-Seidel partendo dal vettore d'innescio $\mathbf{b}^{(0)} = \mathbf{e}$ e confrontarle con la soluzione esatta.

Esercizio 6. Consideriamo ancora la superficie Σ dell'Esercizio 2. Supponiamo che Σ sia una sorgente luminosa dal cui generico punto $\mathbf{x} = (x, y, f(x, y))$ fuoriesce una potenza per unità di area pari a $b(\mathbf{x}) = x$ (W/m^2).

- (i) Scrivere l'integrale che fornisce la potenza β che fuoriesce da Σ ed esprimerlo mediante le coordinate cartesiane $(x, y) \in [0, 1] \times [0, \pi]$.
- (ii) Calcolare il valore (approssimato) di β .
- (iii) Sia β_n lo stimatore di Monte Carlo di β basato su n campioni uniformi nel dominio d'integrazione relativo alle coordinate cartesiane (x, y) . Determinare un n tale che $\mathbb{P}(|\beta_n - \beta| < \varepsilon) \geq 1 - \delta$, dove $\varepsilon, \delta > 0$ sono fissati. Quanto vale n se $\varepsilon = 10^{-2}$ e $\delta = 10^{-1}$?

Esercizio 1.

- (i) Scrivere una procedura MAPLE che, data una superficie Σ e un suo punto $\mathbf{x}_0$, determina uno dei due versori normali a Σ in $\mathbf{x}_0$. Gli input della procedura sono i seguenti:
- una funzione di due variabili $\mathbf{x}(u, v)$ a valori in $\mathbb{R}^3$ che rappresenta la parametrizzazione di Σ ;
 - le coordinate u_0, v_0 di un punto $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(u_0, v_0) \in \Sigma$ per il quale si assume $\mathbf{x}_u(u_0, v_0) \times \mathbf{x}_v(u_0, v_0) \neq \mathbf{0}$.
- L'output della procedura è il versore normale alla superficie Σ in $\mathbf{x}_0$ dato dalla formula

$$\mathbf{N}(\mathbf{x}_0) = \frac{\mathbf{x}_u(u_0, v_0) \times \mathbf{x}_v(u_0, v_0)}{\|\mathbf{x}_u(u_0, v_0) \times \mathbf{x}_v(u_0, v_0)\|}.$$

Si noti che se $\mathbf{x}_u(u_0, v_0) \times \mathbf{x}_v(u_0, v_0) = \mathbf{0}$ allora la procedura restituirà un errore causato dalla divisione per 0, segnalando così all'utente che $\mathbf{x}_u(u_0, v_0) \times \mathbf{x}_v(u_0, v_0) = \mathbf{0}$.

- (ii) Si consideri il paraboloide $\Sigma = \{z = -x^2 - y^2 + 1, z \geq 0\}$. Determinare un versore normale a Σ nel suo punto d'intersezione $\mathbf{x}_0$ con il raggio uscente da $\mathbf{V} = (0, 0, \frac{1}{2})$ in direzione $\mathbf{d} = (0, 1, -\frac{31}{90})$.

Esercizio 2. Una scena consiste dell'interno di una barca (molto rudimentale) $\mathcal{B}$ descritta dalle seguenti equazioni:

$$\begin{aligned}\mathcal{B} &= A \cup B \cup C, \\ A &= \{x^2 + y^2 + (z - 4)^2 = 25, z \leq 0\} = \text{stiva}, \\ B &= \{1 \leq x^2 + y^2 \leq 9, z = 0\} = \text{pavimento}, \\ C &= \{z = -x^2 - y^2 + 1, z \geq 0\} = \text{cabina}.\end{aligned}$$

Siano $\mathbf{V} = (0, 0, \frac{1}{2})$ e $\mathbf{d} = (0, 1, -\frac{31}{90})$.

- Disegnare la barca $\mathcal{B}$ e la sua sezione nel piano yz .
- Supponiamo che un raggio luminoso esca dal punto $\mathbf{V}$ in direzione $\mathbf{d}$. Immaginando che tutte le superfici interne della barca siano specchi ideali, determinare il percorso del raggio luminoso individuando i primi due punti $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ della barca che esso "colpisce".
- Supponiamo che un osservatore si trovi in $\mathbf{V}$ e guardi in direzione $\mathbf{d}$. Immaginando che la cabina sia uno specchio ideale, qual è il punto della stiva che egli vede?

Esercizio 3. Scrivere una procedura MAPLE che implementi l'algoritmo d'illuminazione diretta nel caso in cui l'unica sorgente di luce presente nella scena sia una sorgente puntiforme e il modello d'illuminazione considerato sia quello monocromatico.

- Gli input della procedura sono $\mathbf{V}, \mathbf{x}, \mathbf{L}, I_p, K_d(\mathbf{x}), K_s(\mathbf{x}), p(\mathbf{x}), \mathbf{N}(\mathbf{x})$ ovvero rispettivamente il punto di visuale, il punto in cui si vuole calcolare l'illuminazione diretta, il punto in cui è collocata la sorgente, l'intensità (monocromatica) emessa dalla sorgente, il colore (monocromatico) in $\mathbf{x}$, il coefficiente di riflessione speculare in $\mathbf{x}$, l'esponente di Phong in $\mathbf{x}$, il versore normale esterno in $\mathbf{x}$. Si assuma che $\mathbf{x}$ sia visibile da $\mathbf{V}$ e dal punto $\mathbf{L}$ in cui si trova la sorgente.
- L'output della procedura è l'illuminazione diretta $I^{\mathbf{V}}(\mathbf{x})$ percepita in $\mathbf{x}$ da un osservatore in $\mathbf{V}$.

Esercizio 4. [Questo problema è formulato nell'ambito del modello monocromatico in cui le intensità luminose delle sorgenti e i colori degli oggetti sono degli scalari in $[0, 1]$ che indicano diverse tonalità di grigio come nelle immagini in bianco e nero.] Consideriamo la scena dell'Esercizio 2 con l'osservatore collocato in $\mathbf{V} = (0, 0, \frac{1}{2})$ che guarda in direzione $\mathbf{d} = (0, 1, -\frac{31}{90})$. Una luce bianca d'intensità 1 si trova su fondo della stiva in $\mathbf{L} = (0, 0, -1)$. Tutte le pareti interne della barca sono di colore $\frac{1}{3}$ e hanno coefficiente di riflessione speculare $\frac{1}{4}$ ed esponente di Phong 1.

- (i) Determinare il colore che vede l'osservatore in base all'equazione d'illuminazione 0.
- (ii) Determinare il colore che vede l'osservatore in base all'equazione d'illuminazione 1.

Esercizio 5. Consideriamo la scena dell'Esercizio 2.

- (i) Calcolare il fattore di forma differenziale dal fondo della stiva $(0, 0, -1)$ alla cabina C .
- (ii) Prendendo come patch la stiva A , il pavimento B e la cabina C , si determini la matrice dei fattori di forma F per questa scena.
- (iii) Supponiamo che la stiva emetta luce con potenza α per unità di area e abbia riflettività $\frac{1}{4}$, il pavimento abbia riflettività $\frac{1}{2}$, e la cabina emetta luce con potenza β per unità di area e abbia riflettività $\frac{1}{3}$. Si scriva il sistema della radiosità $M\mathbf{b} = \mathbf{e}$ e se ne calcoli la soluzione esatta in funzione di α e β .
- (iv) Nel caso in cui un fulmine colpisca la cabina facendo spegnere la luce in C , rimarrebbe solo la luce della stiva A ad illuminare la barca. Supponiamo che la radiosità minima di C che permette al conducente di vedere il necessario per guidare la barca sia pari a $b_{\min}$. Qual è il valore minimo di α che garantisce per la cabina la radiosità minima $b_{\min}$ nel caso di un incidente come quello appena descritto?
- (v) Nel caso $\alpha = 1$ e $\beta = 3$, calcolare le prime 9 iterazioni del metodo di Gauss-Seidel per il sistema della radiosità partendo dal vettore d'ingresso $\mathbf{b}^{(0)} = \mathbf{0}$ e confrontarle con la soluzione esatta.

Esercizio 6.

- (i) Scrivere una procedura MAPLE che implementa il metodo d'integrazione di Monte Carlo nel caso in cui si utilizzino n campioni uniformi nell'intervallo d'integrazione. La procedura deve:
 - prendere in input gli estremi a, b di un intervallo, il numero $n \geq 1$ di campioni uniformi in (a, b) da utilizzare, una funzione $f(x)$ definita su (a, b) , e un numero intero $m \geq 1$ scelto a caso dall'utente che serve per la randomizzazione;
 - restituire in output I_n , l'approssimazione di $\int_a^b f(x)dx$ data dal metodo d'integrazione di Monte Carlo basato su n campioni uniformi in (a, b) .
- (ii) Scrivere una procedura MAPLE che implementa il metodo d'integrazione dei trapezi. La procedura deve:
 - prendere in input gli estremi a, b di un intervallo, il numero $n \geq 1$ di sottointervalli in cui viene suddiviso $[a, b]$ e una funzione $f(x)$ definita su $[a, b]$;
 - restituire in output I_n , l'approssimazione di $\int_a^b f(x)dx$ data dalla formula dei trapezi di ordine n .
- (iii) Si consideri l'integrale

$$\int_0^1 \frac{dx}{\log(x+2)}.$$

Per $n = 25000$, si calcolino un'approssimazione dell'integrale con il metodo di Monte Carlo e con il metodo dei trapezi e si confrontino i risultati con la soluzione esatta. Cosa si nota?

Esercizio 1. Scrivere una procedura MAPLE che implementi l'algoritmo d'illuminazione diretta di Lambert-Phong in assenza di luce ambientale, considerando come modello d'illuminazione quello monocromatico.

- Gli input sono $\mathbf{V}, \mathbf{x}, \mathbf{L}_1, \dots, \mathbf{L}_m, I_{p_1}, \dots, I_{p_m}, K_d(\mathbf{x}), K_s(\mathbf{x}), p(\mathbf{x}), \mathbf{N}(\mathbf{x})$ ovvero rispettivamente il punto di visuale, il punto in cui si vuole calcolare l'illuminazione diretta, i punti in cui sono collocate le sorgenti, le intensità (monocromatiche) emesse dalle sorgenti, il colore (monocromatico) in $\mathbf{x}$, il coefficiente di riflessione speculare in $\mathbf{x}$, l'esponente di Phong in $\mathbf{x}$, il versore normale esterno in $\mathbf{x}$. Si assuma che $\mathbf{x}$ sia visibile da $\mathbf{V}$ e da tutti i punti $\mathbf{L}_1, \dots, \mathbf{L}_m$ in cui si trovano le sorgenti.
- L'output è l'illuminazione diretta $I^{\mathbf{V}}(\mathbf{x})$ percepita in $\mathbf{x}$ da un osservatore in $\mathbf{V}$.

Esercizio 2. [Questo problema è formulato nell'ambito del modello monocromatico in cui le intensità luminose delle sorgenti e i colori degli oggetti sono degli scalari in $[0, 1]$ che indicano diverse tonalità di grigio come nelle immagini in bianco e nero.] Una scena consiste dell'interno di una stanza semisferica a forma di iglù di raggio 4 nel semispazio superiore $\{z \geq 0\}$ con il pavimento sul piano $\{z = 0\}$ ed il centro nell'origine. In mezzo alla stanza c'è un tavolo a forma di parallelepipedo rettangolo con la base inferiore di vertici $(\pm 1, \pm 1, 0)$ e la base superiore di vertici $(\pm 1, \pm 1, 1)$. Il tavolo è di colore scuro pari a $\frac{1}{5}$ e ha coefficiente di riflessione speculare $\frac{1}{4}$ ed esponente di Phong 2. Il pavimento e la parete semisferica sono di colore chiaro pari a $\frac{4}{5}$ e hanno coefficiente di riflessione speculare $\frac{2}{3}$ ed esponente di Phong 10. La stanza è illuminata da tre sorgenti di luce collocate nei punti $(0, \pm \frac{5}{2}, 3)$ e $(0, 0, 3)$, tutte d'intensità $\frac{9}{10}$. Un osservatore si trova in $(0, 2, \frac{3}{2})$ e guarda verso il centro del tavolo.

- Determinare il colore che vede l'osservatore in base all'equazione d'illuminazione 0.
- Determinare il colore che vede l'osservatore in base all'equazione d'illuminazione 1.
- Immaginiamo che la scena debba essere resa sul piano di visuale $\{y = -2\}$ così come vista dal punto di visuale $\mathbf{V}$ in cui si trova l'osservatore e supponiamo idealmente che ogni punto del piano $\{y = -2\}$ sia un pixel. Determinare il colore che vede l'osservatore secondo l'algoritmo di Ray Tracing 1 e il pixel che viene colorato dal Ray Tracing 1 con tale colore.

Esercizio 3. Consideriamo il supporto in legno per una lampada da tavolo mostrato schematicamente in Figura 1 (a sinistra) che consiste di 3 parti. Le basi A e C sono dischi di raggi R e r rispettivamente, mentre la parte B è la superficie laterale di un tronco di cono di raggi r , R e altezza h . L'interno del supporto è vuoto.

- Si determinino i fattori di forma differenziali dal centro di C ad A e dal centro di C a B .
- Utilizzando la suddivisione in 3 patch A , B , C , si determini la matrice F dei fattori di forma per il supporto in funzione di $a = F_{A,B}$.
- La base superiore C viene rimossa e sul suo bordo viene montata una lampada a forma di calotta sferica avente centro allineato verticalmente con il centro di A e raggio $s > r$, come mostrato in Figura 1 (a destra). Indicando con D la lampada e prendendo come patch A , B , D , si determini la matrice G dei fattori di forma per la nuova scena (la lampada montata sul supporto) in funzione di $a = F_{A,B}$.
- Supponiamo che $s = R = 2h = 2r$. Si determinino i valori di a che risultano compatibili con la scena della lampada montata sul supporto (cioè con le proprietà di essere compresi in $[0, 1]$, reciprocità e somma 1 dei fattori di forma).
- Supponiamo che $s = R = 2h = 2r$ e che:
 - la lampada D emette luce a potenza 1 per unità di area mentre le patch A e B non emettono luce propria;
 - le riflettività di A , B , D sono $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{9}{10}$, rispettivamente.

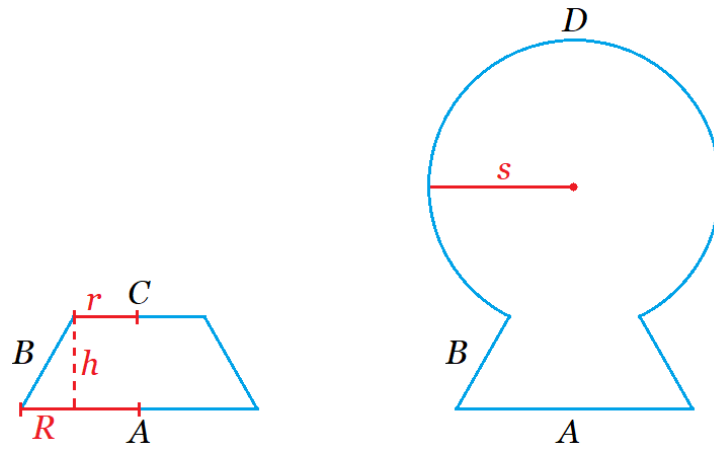


Figura 1: Illustrazione per l'Esercizio 3.

Si determini la radiosità di ogni patch in funzione di a .

- (vi) Nelle ipotesi del punto (v), calcolare (in funzione di a) le prime 2 iterazioni del metodo di Gauss-Seidel per il sistema della radiosità partendo dal vettore d'innescio $\mathbf{b}^{(0)} = \mathbf{0}$.
- (vii) Nel caso $R = 2h = 2r$, si calcoli il valore (approssimato) di $F_{A,C}$, si deduca da esso il valore (approssimato) di a , e si verifichi che esso è un numero puro che non dipende da alcun parametro incognito.

Esercizio 1. Scrivere una procedura MAPLE che implementi l'algoritmo d'illuminazione diretta di Lambert-Phong in versione RGB nel caso in cui ci siano solo due sorgenti di luce nella scena: una sorgente puntiforme e un riflettore di Warn.

- Gli input sono $\mathbf{V}, \mathbf{x}, \mathbf{L}_S, \mathbf{L}_R, \mathbf{L}'_R, q_R, \mathbf{I}_{p,S}, \mathbf{I}_{p,R}, \mathbf{K}_d(\mathbf{x}), K_s(\mathbf{x}), p(\mathbf{x}), \mathbf{N}(\mathbf{x})$ ovvero rispettivamente il punto di visuale, il punto in cui si vuole calcolare l'illuminazione diretta, il punto in cui è collocata la sorgente puntiforme, il punto in cui è collocato il riflettore di Warn, il versore che indica la direzione di massima emissione del riflettore, l'esponente di Phong del riflettore, l'intensità RGB emessa dalla sorgente, l'intensità RGB massima emessa dal riflettore in direzione $\mathbf{L}'_R$, il colore RGB in $\mathbf{x}$, il coefficiente di riflessione speculare in $\mathbf{x}$, l'esponente di Phong in $\mathbf{x}$, il versore normale esterno in $\mathbf{x}$. Si assuma che $\mathbf{x}$ sia visibile da $\mathbf{V}$ e dai punti $\mathbf{L}_S$ e $\mathbf{L}_R$ in cui si trovano la sorgente e il riflettore.
- L'output è l'illuminazione diretta $\mathbf{I}^V(\mathbf{x})$ percepita in $\mathbf{x}$ da un osservatore in $\mathbf{V}$.

Esercizio 2. Una scena consiste dell'interno di una piramide retta a base quadrata con i vertici di base nei punti $(\pm 2, \pm 2, 0)$ e il vertice più alto nel punto $(0, 0, 5)$. Le pareti della piramide sono di colore giallo scuro dato in coordinate RGB da $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$ e hanno coefficiente di riflessione speculare $\frac{1}{3}$ ed esponente di Phong $\frac{3}{2}$. La base della piramide è di colore marrone dato in coordinate RGB da $(\frac{1}{2}, \frac{2}{7}, 0)$ e ha coefficiente di riflessione speculare $\frac{1}{5}$ ed esponente di Phong 1. La piramide è illuminata da due sorgenti di luce:

- una sorgente puntiforme collocata nel punto più alto $(0, 0, 5)$ d'intensità RGB $(0, 1, 0)$ (luce verde);
- un riflettore di Warn collocato al centro della base $(0, 0, 0)$ avente esponente di Phong $\frac{1}{3}$, direzione normale data dal versore $(0, 0, 1)$, ed emissione massima in direzione normale d'intensità pari a $(1, 1, 0)$ (luce gialla).

Un osservatore si trova in $(0, 1, 2)$ e guarda in direzione $(0, 1, 0)$.

- Determinare il colore che vede l'osservatore in base all'equazione d'illuminazione 0.
- Determinare il colore che vede l'osservatore in base all'equazione d'illuminazione 1.
- Determinare il colore che vede l'osservatore in base all'equazione d'illuminazione 2.
- Immaginiamo che la scena debba essere resa sul piano di visuale $\{y = \frac{3}{2}\}$ così come vista dal punto di visuale in cui si trova l'osservatore e supponiamo idealmente che ogni punto del piano $\{y = \frac{3}{2}\}$ sia un pixel. Determinare il colore che vede l'osservatore secondo l'algoritmo di Ray Tracing 2 e il pixel che viene colorato dal Ray Tracing 2 con tale colore.

Esercizio 3. Consideriamo una tenda a forma di cono retto avente come base il cerchio unitario $C = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ e come parete la superficie laterale S del cono il cui vertice $\mathbf{v}$ si trova nel punto $(0, 0, 5)$.

- Calcolare il fattore di forma differenziale da $\mathbf{v}$ a C , pensando $\mathbf{v}$ come centro di un elemento infinitesimo disposto nel piano $\{z = 5\}$.
- Scrivere l'integrale che definisce il fattore di forma differenziale $F_{dS(\mathbf{x}), C}$ da $\mathbf{x}$ a C , dove $\mathbf{x}$ è il punto d'intersezione fra S e la retta verticale passante per il punto $(0, \frac{1}{2}, 0)$.
- Calcolare il valore (approssimato) di $F_{dS(\mathbf{x}), C}$.

Esercizio 4. Una scena consiste dell'interno di un anello cavo a forma di toro con incastonata una perla sferica. La sezione bidimensionale della scena è mostrata in Figura 1 e ombreggiata in azzurro. Indichiamo con R e r rispettivamente il raggio maggiore e minore del toro, e suddividiamo la scena in 3 parti:

- la perla sferica S di raggio r ;
- la prima metà A dell'anello, ossia il semitoro di raggi R, r che "inizia" dalla sezione trasversale del toro passante per il centro di S e "finisce" sulla sezione trasversale "opposta" D ;
- la seconda metà B dell'anello simmetrica rispetto ad A .

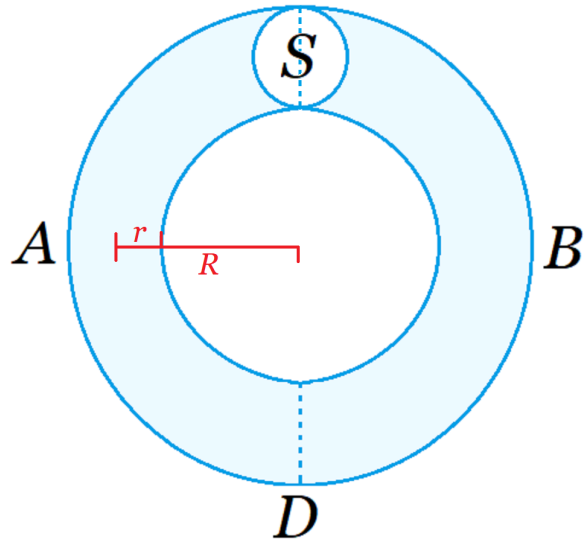


Figura 1: Illustrazione per l'Esercizio 4.

- (i) Utilizzando la suddivisione in 3 patch S , A , B , si determini la matrice F dei fattori di forma per questa scena.

Suggerimento. Può essere utile considerare la scena più semplice formata dalle 3 patch S_A , D , A , dove S_A è la metà di S che “guarda” verso A e D è il disco che chiude la sezione trasversale D tratteggiata in Figura 1.

- (ii) Supponiamo che $R = \frac{10r}{\pi}$ e che:

- la perla S emette luce a potenza RGB $[\alpha, 10\alpha, 10\alpha]$ per unità di area mentre le due metà di anello A e B non emettono luce propria;
- la perla S è azzurra con riflettività RGB $[0, \frac{4}{5}, \frac{4}{5}]$ mentre le due metà di anello A e B sono gialle con riflettività RGB $[1, 1, \frac{3}{5}]$.

Si determini il colore (la radiosità) delle tre patch S , A , B .

- (iii) Nelle ipotesi del punto (ii), calcolare le prime 5 iterazioni del metodo di Gauss-Seidel per il sistema della radiosità nel blu partendo dal vettore d'innescio $\mathbf{b}_B^{(0)} = [0, 0, 0]^T$ e confrontarle con la soluzione esatta $\mathbf{b}_B$.
- (iv) Nelle ipotesi del punto (ii) e assumendo $r = 1$, determinare il valore minimo di α che garantisce per l'intero anello (inclusa quindi la perla) una potenza luminosa uscente nel blu ≥ 1000 .

Esercizio 1. Una scena consiste dell'interno dello spicchio semisferico $\mathcal{S}$ ottenuto prendendo la porzione della sfera di centro l'origine e raggio 1 collocata nell'ottante $\{x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$. In formule, lo spicchio $\mathcal{S}$ è descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{aligned}\mathcal{S} &= A \cup B \cup C \cup D, \\ A &= \{x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, z = 0\} = \text{pavimento}, \\ B &= \{x^2 + z^2 \leq 1, x \geq 0, z \geq 0, y = 0\} = \text{prima parete piana}, \\ C &= \{y^2 + z^2 \leq 1, y \geq 0, z \geq 0, x = 0\} = \text{seconda parete piana}, \\ D &= \{x^2 + y^2 + z^2 = 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\} = \text{parete sferica}.\end{aligned}$$

Il pavimento A è di colore marrone dato in coordinate RGB da $(\frac{1}{2}, \frac{2}{7}, 0)$ e ha coefficiente di riflessione speculare $\frac{1}{5}$ ed esponente di Phong 1. Le pareti piane B e C sono di colore giallo scuro dato in coordinate RGB da $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$ e hanno coefficiente di riflessione speculare $\frac{1}{3}$ ed esponente di Phong $\frac{3}{2}$. La parete sferica D è di colore arancione scuro dato in coordinate RGB da $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0)$ e ha coefficiente di riflessione speculare $\frac{1}{4}$ ed esponente di Phong $\frac{5}{4}$. Lo spicchio $\mathcal{S}$ è illuminato da una sorgente di luce puntiforme collocata nel centro del pavimento $\mathbf{L} = \frac{1}{2}(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ d'intensità RGB $(1, 1, 0)$ (luce gialla). Un osservatore si trova nell'angolo $\mathbf{V} = (1, 0, 0)$. Sia $\mathbf{x} = \frac{1}{2}(0, \cos \theta, \sin \theta)$ con $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$.

- (i) Disegnare lo spicchio $\mathcal{S}$.
- (ii) Dimostrare che, qualunque sia $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$, si ha

$$\langle \mathbf{V}(\mathbf{x}), \mathbf{R}(\mathbf{x}) \rangle \geq 0,$$

dove $\mathbf{V}(\mathbf{x})$ è il versore che va da $\mathbf{x}$ a $\mathbf{V}$ e $\mathbf{R}(\mathbf{x})$ è il versore del raggio riflesso del raggio luminoso uscente da $\mathbf{L}$ in direzione di $\mathbf{x}$.

- (iii) Determinare in funzione di θ il colore che vede l'osservatore nel punto $\mathbf{x}$ in base all'equazione d'illuminazione 0.
- (iv) Dimostrare che, qualunque sia $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$, il primo punto d'intersezione fra la scena e il raggio riflesso del raggio proiettore uscente da $\mathbf{V}$ in direzione di $\mathbf{x}$ è un punto $\mathbf{y} \in D$ e determinare $\mathbf{y}$ in funzione di θ .
- (v) Posto $\mathbf{x}_i = \frac{1}{2}(0, \cos \theta_i, \sin \theta_i)$ con $\theta_i = \frac{i}{5} \cdot \frac{\pi}{2}$, determinare il colore che vede l'osservatore nel punto $\mathbf{x}_i$ in base all'equazione d'illuminazione 1 per ogni $i = 1, \dots, 4$.

Esercizio 2. Sia T il triangolo nel piano xy di vertici $(0, 0, 0)$, $(a, 0, 0)$, $(0, a, 0)$, e siano P e Q i due quarti di cerchio nel primo quadrante del piano xy di centro l'origine e raggi rispettivamente $\frac{a}{\sqrt{2}}$ e a , dove $a > 0$ è un parametro assegnato.

- (i) Calcolare $F_{dA(\mathbf{x}),P}$ e $F_{dA(\mathbf{x}),Q}$, dove $\mathbf{x} = (0, 0, 1)$ è pensato come centro di un elemento infinitesimo $dA(\mathbf{x})$ disposto nel piano $\{z = 1\}$.
 - (ii) Dimostrare che $F_{dA(\mathbf{x}),P} \leq F_{dA(\mathbf{x}),T} \leq F_{dA(\mathbf{x}),Q}$.
 - (iii) Calcolare $F_{dA(\mathbf{x}),T}$.
- Suggerimento.* Usare la formula integrale e passare a coordinate polari.

Esercizio 3. Consideriamo la scena dell'Esercizio 1.

- (i) Utilizzando la suddivisione della scena nelle 4 patch A, B, C, D , si determini la matrice F dei fattori di forma per questa scena in funzione di $a = F_{A,B}$.

- (ii) Determinare i valori di a che sono compatibili con il problema, cioè con le proprietà di essere compresi in $[0, 1]$, reciprocità e somma 1 dei fattori di forma.
- (iii) Supponiamo che il pavimento A emetta luce con potenza 1 e che le riflettività di A , B , C , D siano rispettivamente $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{5}$. Si scriva il sistema della potenza $K\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\varepsilon}$ e se ne calcoli la soluzione esatta $\boldsymbol{\beta}$ in funzione di a . Si calcoli inoltre la radiosità della parete sferica D .
- (iv) Dimostrare che

$$a = \frac{4}{\pi^2} \int_0^1 dr \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^1 ds \int_0^{\pi/2} d\phi \frac{r^2 s^2 \sin \theta \sin \phi}{(r^2 + s^2 - 2rs \cos \theta \cos \phi)^2}.$$

- (v) Calcolando approssimativamente l'integrale al punto (iv), si può verificare che $a \approx \frac{1}{5}$. Usando il valore $a = \frac{1}{5}$, calcolare le prime 8 iterazioni del metodo di Southwell per il sistema della potenza partendo dal vettore d'innescio $\boldsymbol{\beta}^{(0)} = [0, 0, 0, 0]^T$ e confrontarle con la soluzione esatta $\boldsymbol{\beta}$.

Esercizio 1. [Questo problema è formulato nell’ambito del modello monocromatico in cui le intensità luminose delle sorgenti e i colori degli oggetti sono degli scalari in $[0, 1]$ che indicano diverse tonalità di grigio come nelle immagini in bianco e nero.] Consideriamo un parallelepipedo infinito avente come pavimento il rettangolo infinito $P = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 : -1 \leq x \leq 1, y \in \mathbb{R}\}$, come soffitto il rettangolo infinito $S = \{(x, y, 1) : -1 \leq x \leq 1, y \in \mathbb{R}\}$, e come pareti laterali i rettangoli infiniti $L_1 = \{(1, y, z) : y \in \mathbb{R}, 0 \leq z \leq 1\}$ e $L_2 = \{(-1, y, z) : y \in \mathbb{R}, 0 \leq z \leq 1\}$. Il colore nel generico punto $\mathbf{x} = (x, y, z)$ del parallelepipedo dipende solo dall’ordinata y di $\mathbf{x}$ ed è pari a $K_d(\mathbf{x}) = c(y)$ dove $c : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ è una funzione assegnata. Il coefficiente di riflessione speculare del parallelepipedo è costante in ogni punto ed è pari a $\frac{1}{2}$. L’unica luce presente nel parallelepipedo è la luce ambientale bianca d’intensità 1. Un osservatore si trova sul pavimento del parallelepipedo, precisamente nell’origine, e guarda verso il punto $\mathbf{x}_0 = (0, 1, 1)$.

- (i) Per ogni $n \geq 0$, determinare il colore C_n che vede l’osservatore in base all’equazione d’illuminazione n .
- (ii) Dimostrare che esiste finito il limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C_n = C_\infty.$$

Possiamo dire che C_∞ è il colore che vede l’osservatore in base all’equazione d’illuminazione ∞ .

- (iii) Supponiamo che $c(y) = \frac{1}{|y|+1}$. Calcolare esplicitamente il valore esatto di C_∞ .

Esercizio 2. La superficie esterna Σ di una campana è data dal grafico della funzione sinusoidale $f(x, y) = \sin(\pi x) \sin(\pi y)$ per $(x, y) \in [0, 1]^2$. La campana è momentaneamente fuori uso e si trova appoggiata per terra ed esposta al sole. Ad un certo istante, il sole si trova allo zenit del punto più alto della campana $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1)$ e la radiosità della campana nel suo generico punto $\mathbf{x} = (x, y, f(x, y))$ è proporzionale all’altezza di $\mathbf{x}$ dal suolo e data da $b(\mathbf{x}) = K f(x, y)$ (W/m^2) dove $K > 0$ è una costante di proporzionalità.

- (i) Disegnare con MAPLE la campana Σ .
- (ii) Scrivere l’integrale che fornisce la potenza β uscente da Σ ed esprimerlo mediante le coordinate cartesiane $(x, y) \in [0, 1]^2$.
- (iii) Calcolare il valore (approssimato) di β .

Esercizio 3. Consideriamo l’interno di un piccolo candelabro con due sole luci mostrato schematicamente in Figura 1 e costituito da 5 parti. Le parti B e D sono superfici cilindriche aventi raggio di base r e altezza m . Le parti A e C sono due lampadine uguali a forma di calotta sferica di raggio $s > r$. Il centro di A è allineato verticalmente con i centri di A' (il disco che, se ci fosse, chiuderebbe superiormente B) ed E' (il disco che, se ci fosse, chiuderebbe inferiormente B). Similmente, il centro di C è allineato verticalmente con i centri di C' (il disco che, se ci fosse, chiuderebbe superiormente D) ed E'' (il disco che, se ci fosse, chiuderebbe inferiormente D). La parte E è un parallelepipedo di lunghezza $l > 2(r + s)$, altezza h e profondità $2r$ pari al diametro dei dischi E' ed E'' . Si noti che i dischi E' ed E'' non ci sono e quindi creano due cavità circolari in E .

- (i) Calcolare il fattore di forma differenziale da $\mathbf{x}$ ad A , dove $\mathbf{x}$ è il punto sulla base di E allineato verticalmente con il centro di A' .
- (ii) Dimostrare che $F_{B,E} = F_{B,A} = F_{B,A'} = F_{B,E'}$.
Suggerimento. Considerare prima la scena più semplice costituita dalle tre sole patch A', B, E' , poi la scena costituita da A, B, E' , e infine la scena costituita da A', B, E (quest’ultima scena può essere utile chiuderla aggiungendovi E'').
- (iii) Utilizzando la suddivisione in 5 patch A, B, C, D, E , determinare la matrice F dei fattori di forma per il candelabro in funzione di $a = F_{A,B}$.

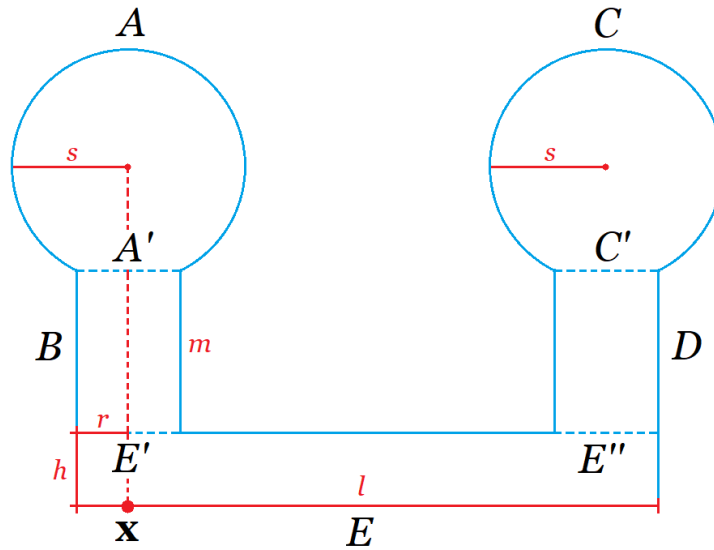


Figura 1: Illustrazione per l'Esercizio 3.

- (iv) Da adesso in poi si suppone che $r = 3$, $m = 10$, $s = 5$, $l = 20$, $h = 1$. Determinare i valori di a che sono compatibili con il problema, cioè con le proprietà di essere compresi in $[0, 1]$, reciprocità e somma 1 dei fattori di forma.
- (v) Da adesso in poi si suppone che A e C siano lampadine che emettono luce con potenza 60 (due classiche lampadine da 60 W) e che inoltre le riflettività di A e C siano $\frac{9}{10}$, le riflettività di B e D siano $\frac{3}{5}$, e la riflettività di E sia $\frac{1}{2}$. Calcolare in funzione di a la potenza uscente dalle patch A , B , C , D , E nei seguenti due casi:

- entrambe le lampadine sono accese;
- la lampadina C si brucia e resta accesa solo la lampadina A .

Osservazione. La potenza uscente da B , D , E è un indicatore di quanto sono “calde” queste patch quando sono accese entrambe le lampadine (primo caso) oppure è accesa solo la lampadina A (secondo caso).

- (vi) Calcolare il valore (approssimato) di a .

Suggerimento. Considerare la scena più semplice costituita dalle tre sole patch A' , B , E' e ricordare il risultato del punto (ii).

Esercizio 1. Sia C il cerchio nel piano xy di centro l'origine e raggio r . Sia T il triangolo inscritto in C i cui vertici sono $(0, -r, 0)$ più i due punti d'intersezione della circonferenza di bordo di C con la retta che nel piano xy ha equazione $y = \frac{1}{2}x + \frac{r}{2}$. Indichiamo con $D = C \setminus T$ la superficie “differenza”, ottenuta togliendo al cerchio C il triangolo T .

- (i) Determinare l'area D_α della proiezione ortogonale di D sul piano passante per i punti $(0, 0, 0)$, $(1, -2, 1)$, $(-1, -1, \alpha)$, dove $\alpha \in \mathbb{R}$ è un numero assegnato.
- (ii) Determinare il valore di α che rende massima l'area D_α , e determinare anche il rapporto fra la massima area proiettata D_α e l'area D .

Esercizio 2. [Questo problema è formulato nell'ambito del modello monocromatico in cui le intensità luminose delle sorgenti e i colori degli oggetti sono degli scalari in $[0, 1]$ che indicano diverse tonalità di grigio come nelle immagini in bianco e nero.] Una scena consiste dell'interno della sfera di centro l'origine e raggio 1. Il colore nel generico punto $\mathbf{x} = (x, y, z)$ della sfera dipende solo dalla quota z di $\mathbf{x}$ ed è pari a $K_d(\mathbf{x}) = c(z)$ dove $c : [-1, 1] \rightarrow [0, 1]$ è una funzione assegnata. Il coefficiente di riflessione speculare della sfera è costante in ogni punto ed è pari a s con $0 < s < 1$. L'esponente di Phong della sfera è costante in ogni punto ed è pari a 2. La sfera è illuminata da un'unica sorgente puntiforme collocata nell'origine d'intensità 1. Un osservatore si trova nel punto $\mathbf{V} = (0, 0, -1)$ e guarda verso il punto $\mathbf{x}_0 = (0, 1, 0)$.

- (i) Supponiamo che un ipotetico raggio luminoso esca dal punto $\mathbf{V}$ in direzione del punto $\mathbf{x}_0$. Determinare il percorso del raggio luminoso individuando tutti i punti della sfera $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4, \dots$ che esso “colpisce” riflettendosi ripetutamente sulle pareti della sfera.¹
- (ii) Per ogni $n \geq 0$, determinare il colore C_n che vede l'osservatore in base all'equazione d'illuminazione n .
- (iii) Dimostrare che esiste finito il limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C_n = C_\infty.$$

Possiamo dire che C_∞ è il colore che vede l'osservatore in base all'equazione d'illuminazione ∞ .

- (iv) Supponiamo che $c(z) = |z|$. Calcolare esplicitamente il valore esatto di C_∞ .

Esercizio 3. Una scena consiste dell'interno di una stanza a forma di parallelepipedo rettangolo di lunghezza 5, larghezza 4 e altezza 3. Il pavimento P della stanza è il rettangolo nel piano xy con $-2 \leq x \leq 2$ e $-\frac{5}{2} \leq y \leq \frac{5}{2}$. La stanza è priva di ogni arredo e l'unico oggetto presente in essa è il lampadario L : si tratta di un cilindro di altezza $\frac{1}{4}$ e raggio di base $\frac{1}{8}$ avente i due cerchi C_{sup} e C_{inf} che lo chiudono superiormente e inferiormente paralleli al soffitto e centrati rispettivamente in $(0, 0, \frac{21}{8})$ e $(0, 0, \frac{19}{8})$; il lampadario è appeso al soffitto mediante un filo verticale che unisce il suo centro $(0, 0, \frac{5}{2})$ al punto $(0, 0, 3)$ del soffitto. Possiamo suddividere la scena in tre patch: il lampadario L (incluso il filo che lo appende al soffitto), il pavimento P , e l'unione U di tutte le altre pareti della stanza incluso il soffitto (escluso il pavimento).

- (i) Calcolare il fattore di forma differenziale dall'origine a U .
- (ii) Scrivere l'integrale che definisce il fattore di forma differenziale $F_{dP(\mathbf{x}), C_{\text{inf}}}$ dall'angolo del pavimento $\mathbf{x} = (2, \frac{5}{2}, 0)$ a C_{inf} , pensando $\mathbf{x}$ come punto del pavimento P e non delle altre due pareti laterali della stanza che condividono con P il punto $\mathbf{x}$.
- (iii) Calcolare il valore (approssimato) di $F_{dP(\mathbf{x}), C_{\text{inf}}}$.

Esercizio 4. Una scena consiste dell'interno di una capanna avente come pavimento un disco D di raggio R e come tenda di chiusura la superficie laterale di un cono retto C con disco di base D e altezza h . Il pavimento è a sua volta suddiviso in due superfici: un disco centrale A di raggio $r < R$ e una corona circolare $B = D \setminus A$; si veda la Figura 1.

¹ Naturalmente, il primo punto “colpito” sarà proprio $\mathbf{x}_0$.

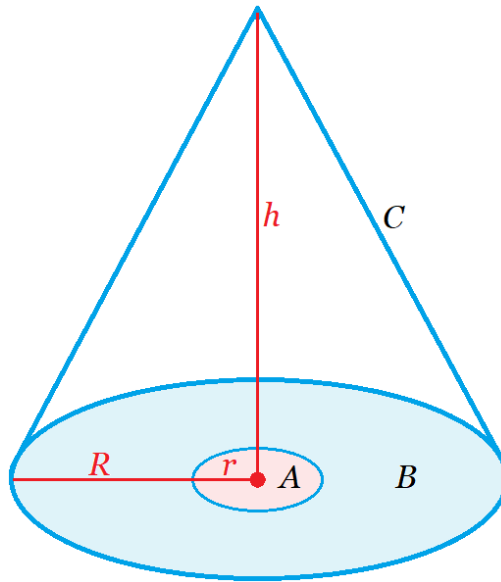


Figura 1: Illustrazione per l'Esercizio 4.

- (i) Utilizzando la suddivisione in 3 patch A, B, C , si determini la matrice dei fattori di forma F per la capanna.
- (ii) Supponiamo che A emetta luce con potenza 1 per unità di area e che le riflettività di A, B, C siano $\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}$, rispettivamente. Si scriva il sistema della radiosità e se ne calcoli la soluzione esatta.
- (iii) Si calcoli il raggio spettrale della matrice d'iterazione del metodo di Gauss-Seidel per risolvere il sistema della radiosità.
- (iv) Nel caso in cui $h = R = 5r$, calcolare le prime 3 iterazioni del metodo di Gauss-Seidel per risolvere il sistema della radiosità partendo dal vettore d'innescio $\mathbf{b}^{(0)} = [0, 0, 0]^T$.