Universita' degli Studi di Roma "Tor Vergata"
Facolta' di Ingegneria Edile ed Edile/Architettura

Geometria Proiettiva
Docente F. Flamini

FASCI DI CONICHE PROIETTIVE

Definizione. 1 *Siano C_1 e C_2 due coniche distinte di $\mathbb{P}^2$ rappresentate, rispettivamente, dai polinomi $F_1(x_0, x_1, x_2) = 0$ e $F_2(x_0, x_1, x_2) = 0$. Il* fascio di coniche *generato da C_1 e C_2 e' l'insieme di coniche di $\mathbb{P}^2$ dato da*

$$\mathcal{F}_{\lambda,\mu} := \{F_{\lambda,\mu}(x_0, x_1, x_2) = \lambda F_1(x_0, x_1, x_2) + \mu F_2(x_0, x_1, x_2) = 0, \ \ (\lambda, \mu) \neq (0, 0)\}.$$

Il polinomio $F_{\lambda,\mu}(x_0, x_1, x_2) = 0$, che dipende dai parametri λ e μ, si chiama l'equazione del fascio.

Osservazione. 2 (1) Per ogni fissato valore della coppia $(\lambda_0, \mu_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ troviamo una ed una sola conica del fascio, di equazione $F_{\lambda_0,\mu_0}(x_0, x_1, x_2) = \lambda_0 F_1(x_0, x_1, x_2) + \mu_0 F_2(x_0, x_1, x_2) = 0$.
(2) Abbiamo una identificazione tra $\mathcal{F}_{\lambda,\mu}$ e $\mathbb{P}^1$, in cui

$$\mathcal{F}_{\lambda,\mu} \ni (F_{\lambda,\mu}(x_0, x_1, x_2) = 0) \longrightarrow [\lambda, \mu] \in \mathbb{P}^1$$

e viceversa.
(3) Un fascio di coniche $\mathcal{F}_{\lambda,\mu}$ si puo' determinare grazie a due qualsiasi coniche distinte appartenenti al fascio.

Proposizione. 3 *Sia $\mathcal{F}_{\lambda,\mu}$ un fascio di coniche proiettive di $\mathbb{P}^2$. Allora si verifica una delle 2 seguenti possibilita':*
(i) Tutte le coniche del fascio hanno in comune una retta $l \subset \mathbb{P}^2$. Nel qual caso, tutte le coniche del fascio sono degeneri, spezzate in due rette (non necessariamente sempre distinte) ed il fascio $\mathcal{F}_{\lambda,\mu}$ si dice avere una componente fissa*, che e' proprio la retta l; oppure*
(ii) Tutte le coniche del fascio hanno in comune un insieme Λ di punti di $\mathbb{P}^2$, di cardinalita' minore od uguale a quattro, costituito da punti comuni a due qualsiasi coniche di $\mathcal{F}_{\lambda,\mu}$. Nel qual caso, Λ viene detto il luogo base *del fascio $\mathcal{F}_{\lambda,\mu}$.*

Dimostrazione. Prendiamo una qualsiasi rappresentazione del fascio $\mathcal{F}_{\lambda,\mu}$ come

$$F_{\lambda,\mu}(x_0, x_1, x_2) = \lambda F_1(x_0, x_1, x_2) + \mu F_2(x_0, x_1, x_2) = 0,$$

per opportuni polinomi $F_i(x_0, x_1, x_2)$, $1 \leq i \leq 2$, di secondo grado.

(i) Se $F_1(x_0, x_1, x_2)$ e $F_2(x_0, x_1, x_2)$ hanno in comune un termine lineare $L(x_0, x_1, x_2)$, allora $F_i(x_0, x_1, x_2) = L(x_0, x_1, x_2) \cdot H_i(x_0, x_1, x_2)$, per opportuni polinomi di primo grado $H_i(x_0, x_1, x_2)$, $1 \leq i \leq 2$. Percio', l'equazione del fascio diventa

$$F_{\lambda,\mu}(x_0, x_1, x_2) = L(x_0, x_1, x_2) \cdot (\lambda H_1(x_0, x_1, x_2) + \mu H_2(x_0, x_1, x_2)),$$

con $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$. Il fascio $\mathcal{F}_{\lambda,\mu}$ si riduce ad una retta fissa l, di equazione $L(x_0, x_1, x_2) = 0$, e ad un fascio di rette $\mathcal{R}_{\lambda,\mu} = \{\lambda H_1(x_0, x_1, x_2) + \mu H_2(x_0, x_1, x_2)\}$.

(ii) Se $F_1(x_0, x_1, x_2)$ e $F_2(x_0, x_1, x_2)$ non hanno in comune un termine lineare, ogni conica del fascio passa per i punti di intersezione di $C_1 \cap C_2$, cioe' i punti dati dal sistema $F_1(x_0, x_1, x_2) = F_2(x_0, x_1, x_2) = 0$. Questo insieme di punti, essendo intersezione di due coniche, e' costituito da al piu' 4 punti.

□

Osservazione. 4 Se alle coniche del fascio $\mathcal{F}_{\lambda,\mu}$ si impone il passaggio per un qualsiasi punto Q che non giace ne' su un'eventuale componente fissa del fascio ne' nel luogo base del fascio, si ottiene un'unica conica che passa per Q. Infatti, se $F_{\lambda,\mu}(x_0, x_1, x_2) = \lambda F_1(x_0, x_1, x_2) + \mu F_2(x_0, x_1, x_2) = 0$ e' una qualsiasi equazione del fascio, se sostituiamo le coordinate del punto $Q = [q_0, q_1, q_2]$ in $F_{\lambda,\mu}(x_0, x_1, x_2)$, otteniamo una relazione lineare in λ e μ, i.e.

$$\lambda F_1(q_0, q_1, q_2) + \mu F_2(q_0, q_1, q_2) = 0.$$

Per ipotesi su Q, $F_1(q_0, q_1, q_2)$ e $F_2(q_0, q_1, q_2)$ sono numeri reali non entrambi nulli. Percio' si determina un unico $[\lambda, \mu] \in \mathbb{P}^1$ e quindi un'unica conica del fascio.

Esempio. 5 Siano $F(x_0, x_1, x_2) = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2$ e $G(x_0, x_1, x_2) = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$ due coniche di $\mathbb{P}^2$. Trovare l'unica conica del fascio da esse generato che passa per il punto $[1, 1, 1]$.

Prendiamo $F_{\lambda,\mu} = \lambda(x_0^2 + x_1^2 + x_2^2) + \mu(x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2) = 0$. Imponendo il passaggio per $[1, 1, 1]$ si ottiene $3\lambda + 4\mu = 0$, cioe' $\lambda = -(4/3)\mu$. Percio', l'unica conica che passa per $[1, 1, 1]$ e' la conica di equazione:

$$-4(x_0^2 + x_1^2 + x_2^2) + 3(x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2) = 0,$$

cioe'

$$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 - 3x_1x_2 = 0.$$

Abbiamo visto che i fasci di coniche con una retta fissa, si riducono ai fasci di rette, dato che se due coniche sono degeneri con una retta in comune, allora tutte lo sono.

Al contrario, se prendiamo fasci di coniche prive di rette fisse comuni, non e' vero in generale che tutte le coniche del fascio sono non degeneri. Nell'esempio precedente, F e G erano due coniche non-degeneri, eppure se $\lambda = -1$ e $\mu = 1$ si ottiene la conica di equazione $x_1x_2 = 0$ che e' manifestamente degenere. Questa e' una proprieta' del tutto generale.

Teorema. 6 *Un fascio di coniche $\mathcal{F}_{\lambda,\mu}$, privo di componenti base, contiene al piu' tre coniche degeneri.*

Dimostrazione. Sia $F_{\lambda,\mu}(x_0, x_1, x_2) = \lambda F_1(x_0, x_1, x_2) + \mu F_2(x_0, x_1, x_2) = 0$ una qualsiasi equazione del fascio. Esistono allora due matrici simmetriche reali, 3×3, A_1 ed A_2, tali che, denotato con $\mathbf{x}^t = (x_0, x_1, x_2)$, allora

$$F_i(x_0, x_1, x_2) = \mathbf{x}^t A_i \mathbf{x} = 0.$$

Percio'

$$F_{\lambda,\mu}(x_0, x_1, x_2) = \mathbf{x}^t(\lambda A_1 + \mu A_2)\mathbf{x} = 0.$$

Per trovare le coniche degeneri del fascio, basta considerare i valori di λ e μ tali che

$$P(\lambda, \mu) = det(\lambda A_1 + \mu A_2) = 0.$$

Il polinomio $P(\lambda, \mu) = 0$ e' un polinomio della forma

$$P(\lambda, \mu) = \lambda^3 det(A_1) + \lambda^2 \mu h(A_1, A_2) + \lambda\mu^2 k(A_1, A_2) + \mu^3 det(A_2) = 0,$$

dove $h(A_1, A_2), k(A_1, A_2)$ denotano dei polinomi negli elementi matriciali di A_1 ed A_2.

Siccome il fascio e' per ipotesi privo di una componente fissa, allora il polinomio $P(\lambda, \mu)$ non e' il polinomio identicamente nullo. Percio' il polinomio $P(\lambda, \mu) = 0$ ammette almeno una soluzione reale e ne ammette al piu' tre (non necessariamente distinte).

Ad esempio, se $C_2 = F_2(x_0, x_1, x_2) = 0$ e' degenere e se A_1 e A_2 sono matrici tali che $h(A_1, A_2) = k(A_1, A_2) = 0$, allora il polinomio $P(\lambda, \mu)$ diventa

$$\lambda^2 det(A_1) = 0.$$

Siccome per ipotesi sul fascio, C_1 deve essere non degenere, i.e. $det(A_1) \neq 0$, allora il polinomio ammette come unica soluzione la soluzione $\lambda = 0$ contata con molteplicita' 3. Percio' l'unica conica degenere del fascio e' C_2 e questa puo' essere l'unica conica degenere sia reale che complessa di tale fascio. $\square$

Esercizio *Determinare l'equazione della conica di $\mathbb{P}^2$ passante per i punti fondamentali, per il punto unita' e per il punto* $[1, 2, 3]$.