Universita' degli Studi di Roma "Tor Vergata"
Facolta' di Ingegneria Edile ed Edile/Architettura

Geometria Proiettiva
Docente F. Flamini

CONICHE PROIETTIVE: Classificazione e forme canoniche proiettive

Si consideri $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ con coordinate omogenee $[x_0, x_1, x_2]$.

Definizione. 1 *Una* conica proiettiva $\mathcal{C}$ *di* $\mathbb{P}^2$ *e' una classe di proporzionalita'* $[P(x_0, x_1, x_2)]$, *dove* $P(x_0, x_1, x_2)$ *e' un polinomio omogeneo di secondo grado della forma*

$$(1) \qquad P(x_0, x_1, x_2) = ax_0^2 + bx_1^2 + cx_2^2 + 2dx_0x_1 + 2ex_0x_2 + 2fx_1x_2,$$

dove $a, b, \ldots, f \in \mathbb{R}$ *non tutti nulli.*
L'equazione

$$P(x_0, x_1, x_2) = 0$$

*viene detta l'*equazione cartesiana *di* $\mathcal{C}$. *Il luogo dei punti di* $\mathbb{P}^2$ *che soddisfano l'equazione cartesiana viene detto il* supporto *di* $\mathcal{C}$.

Osservazione. 2 (I) Notiamo che il polinomio nella formula (1) e' una forma quadratica di ordine 3. Percio', a tale polinomio sappiamo associare la matrice simmetrica 3×3, che denotiamo con A. In tal modo, ponendo

$${}^t\overline{X} = (x_0, x_1, x_2)$$

la matrice riga delle indeterminate, abbiamo che l'equazione cartesiana di $\mathcal{C}$ si puo' scrivere in forma matriciale:

$$(2) \qquad 0 = P(x_0, x_1, x_1) = {}^t\overline{X} A \overline{X}.$$

(II) L'equazione cartesiana di una conica $\mathcal{C}$, essendo omogenea di grado 2, e' ben definita come luogo geometrico di $\mathbb{P}^2$. Infatti, sia $Q \in \mathbb{P}^2$ appartenente al supporto di $\mathcal{C}$. Siano

$$Q = [p_0, p_1, p_2] = [\lambda p_0, \lambda p_1, \lambda p_2], \ \ \forall\ \lambda \in \mathbb{R}^*$$

le coordinate omogenee del punto. Poiche' $Q \in \mathcal{C}$ per ipotesi, allora

$$P(p_0, p_1, p_2) = 0.$$

Contemporaneamente

$$P(\lambda p_0, \lambda p_1, \lambda p_2) = \lambda^2 P(p_0, p_1, p_2)$$

visto che (1) e' omogenea di grado 2. Pertanto, anche

$$P(\lambda p_0, \lambda p_1, \lambda p_2) = 0,$$

i.e. e' ben definito come luogo di $\mathbb{P}^2$.

(III) Per il Teorema spettrale degli operatori autoaggiunti, la matrice A risulta diagonalizzabile. Precisamente, se λ_i, $0 \leq i \leq 2$, sono i tre autovalori (non necessariamente distinti) reali di A, sappiamo che esiste una matrice M ed una trasformazione di coordinate omogenee

$$\overline{X} = M\overline{Y}, \tag{3}$$

dove ${}^t\overline{X} = (x_0, x_1, x_2)$ e ${}^t\overline{Y} = (y_0, y_1, y_2)$, per cui l'equazione cartesiana di $\mathcal{C}$ in queste nuove coordinate e':

$$\mathcal{C}' : \ \lambda_0 y_0^2 + \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 = 0. \tag{4}$$

A meno di un cambiamento di indeterminate, si puo' inoltre sempre supporre che

$$\lambda_0 > 0. \tag{5}$$

Poniamo ora:

$$\mu_i := \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{|\lambda_i|}} & \text{se } \lambda_i \neq 0 \\ 1 & \text{se } \lambda_i = 0 \end{cases}$$

con $0 \leq i \leq 2$; possiamo quindi considerare la trasformazione di coordinate omogenee

$$z_0 = \mu_0 y_0, \ \ z_1 = \mu_1 y_1, \ \ z_2 = \mu_2 y_2.$$

Posti

$$\overline{Y} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \text{ e } \overline{Z} = \begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \\ z_2 \end{pmatrix},$$

la precedente trasformazione di coordinate e', in forma matriciale,

$$\overline{Y} = \begin{pmatrix} \mu_0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_1 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_2 \end{pmatrix} \overline{Z} = D_{\mu_o, \mu_1, \mu_2} \overline{Z}. \tag{6}$$

Con tale trasformazione di coordinate, e ricordando l'assunzione (5), l'equazione cartesiana (4) diventa

$$\mathcal{C}'' : \ \ z_0^2 + \epsilon_1 z_1^2 + \epsilon_2 z_2^2 = 0, \tag{7}$$

con

$$\epsilon_i := \begin{cases} 1 & \Leftrightarrow \ \lambda_i > 0 \\ -1 & \Leftrightarrow \ \lambda_i < 0 \\ 0 & \Leftrightarrow \ \lambda_i = 0 \end{cases}$$

La matrice simmetrica D associata a $\mathcal{C}''$ e' una matrice diagonale e ha pertanto elementi diagonali che sono esclusivamente

$$0,\ 1,\ -1.$$

Precisamente:
• il numero di elementi diagonali nulli di D e' pari a

$$3 - \mathrm{rango}(D) = 3 - \mathrm{rango}(A);$$

• il numero di $+1$ e di -1 coincide con la segnatura della forma quadratica (1); in altri termini, il numero di $+1$ coincide con il numero di coefficienti λ_i positivi di (4), mentre il numero di -1 coincide con il numero di coefficienti λ_i negativi di (4).
(IV) Dalle trasformazioni di coordinate (3) e (6), la trasformazione di coordinate complessiva, dalle coordinate omogenee $\overline{X}$ alle coordinate omogenee $\overline{Z}$, e'

$$\overline{X} = (MD_{\mu_0,\mu_1,\mu_2})\overline{Z}. \tag{8}$$

Poniamo

$$B := MD_{\mu_0,\mu_1,\mu_2}$$

la matrice 3×3 ottenuta come prodotto righe-per-colonne delle due matrici quadrate 3×3. Visto che sia la matrice M che la matrice D_{μ_0,μ_1,μ_2} sono invertibili, la matrice B e' anch'essa invertibile. Pertanto B determina la matrice di una proiettivita'

$$F = F_B : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2.$$

In altri temini, la conica $\mathcal{C}$ di partenza, di equazione cartesiana data dal polinomio $P(x_0, x_1, x_2)$ come in (1), e' *proiettivamente equivalente* alla conica $\mathcal{C}''$ di equazione cartesiana (7), i.e. esiste sempre una proiettivita' di $\mathbb{P}^2$ che induce una trasformazione di coordinate omogenee di $\mathbb{P}^2$, in cui l'equazione cartesiana della conica $\mathcal{C}$ si trasforma in un'equazione piu' semplice possibile, della forma (7).

In particolare, abbiamo dimostrato la seguente:

Proposizione. 3 *Una qualsiasi conica proiettiva $\mathcal{C}$, di equazione cartesiana*

$$P(x_0, x_1, x_2) = {}^t\overline{X} A \overline{X} = 0$$

come (2)*, e' sempre proiettivamente equivalente ad una conica di equazione cartesiana come in* (7)*, dove*
• *il numero di coefficienti non nulli e' pari a* $3 - \mathrm{rango}(A)$*;*
• *il numero di* $+1$ *coincide con il numero di autovalori positivi di* A*, mentre il numero di* -1 *coincide con il numero di autovalori negativi di* A*.*

Definizione. 4 *Una conica proiettiva $\mathcal{C}$, di equazione cartesiana come in* (2)*, si dice*

(i) generale *(o* non-degenere*), se* rango$(A) = 3$ *(i.e. $\epsilon_1, \epsilon_2 \neq 0$);*
(ii) semplicemente degenere*, se* rango$(A) = 2$ *(i.e. se $\epsilon_i = 0$ e $\epsilon_j \neq 0$, con $1 \leq i \neq j \leq 2$);*
(iii) doppiamente degenere*, se* rango$(A) = 1$ *(i.e. se $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 0$).*

Definizione. 5 *Definiamo la seguente tabella:*

	Equazione	Rango	Segnatura	Denominazione
(1)	$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$	3	$(3, 0)$	*conica generale a punti non reali*
(2)	$x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 = 0$	3	$(2, 1)$	*conica generale a punti reali*
(3)	$x_0^2 + x_1^2 = 0$	2	$(2, 0)$	*conica sempl. degenere puntiforme*
(4)	$x_0^2 - x_1^2 = 0$	2	$(1, 1)$	*conica sempl. degenere*
(5)	$x_0^2 = 0$	1	$(1, 0)$	*conica doppiamente degenere*

la tabella fondamentale per la classificazione proiettiva delle coniche di $\mathbb{P}^2$.

Notiamo le seguenti immediate conseguenze di Definizione 5:
(I) Le coniche della tabella precedente sono a due a due **non-proiettivamente equivalenti**; cioe' non puo' esistere una proiettivita' di $\mathbb{P}^2$ che possa trasformare una conica di tipo (i) in una di tipo (j), per ogni $1 \leq i \neq j \leq 5$. Questo discende direttamente dal fatto che i ranghi e le segnature dei vari casi sono tutti diversi.
(II) Il supporto della conica di tipo (1) e' $\emptyset$. Il supporto della conica $\mathcal{C}$ di tipo (2) e' una curva costituita da infiniti punti, ciascun punto e' un punto non singolare per $\mathcal{C}$ (dato che il rango della matrice e' massimo).
Il supporto della conica di tipo (3) e' il solo punto $[0, 0, 1]$; per questo motivo si dice conica puntiforme. Invece il supporto della conica di tipo (4) e' la coppia di rette proiettive distinte (quindi incidenti)

$$x_0 - x_1 = 0 \;\text{ e }\; x_0 + x_1 = 0;$$

esse si interesecano nel punto $[0, 0, 1]$. Il punto in questione e' singolare per la conica. Questo discende dal fatto che il rango della matrice e' 2.
Il supporto della conica di tipo (5) e' invece la retta fondamentale $x_0 = 0$, contata pero' con molteplicita' 2 (cioe' e' una retta doppia). Notiamo che il fatto che il rango della matrice sia 1 si legge geometricamente considerando che la conica in questione contiene infiniti punti singolari.

Definizione. 6 *Le coniche nella tabella fondamentale per la la classificazione proiettiva delle coniche di $\mathbb{P}^2$ vengono dette anche le* forme canoniche proiettive *delle coniche di $\mathbb{P}^2$.*

Da quanto dimostrato in Proposizione 3, abbiamo immediatamente il seguente:

Teorema. 7 *Ogni conica $\mathcal{C}$ di $\mathbb{P}^2$ e' proiettivamente equivalente ad una ed una sola delle forme canoniche proiettive delle coniche di $\mathbb{P}^2$.*

Per *classificare* una conica proiettiva $\mathcal{C}$ (i.e. stabilire quale forma canonica proiettiva ha) e' sufficiente quindi studiare il rango e la segnatura della matrice simmetrica A di $\mathcal{C}$.

CHIUSURA PROIETTIVA DI CONICHE AFFINI

Sia $\mathcal{C}$ una conica affine. Supponiamo che le coordinate di $\mathbb{R}^2$ siano (x,y). Consideriamo allora l'equazione cartesiana di $\mathcal{C}$ come:

$$P(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0. \tag{9}$$

Se consideriamo $\mathbb{R}^2$ come la carta $A_0 \subset \mathbb{P}^2$, questo significa che

$$x = \frac{x_1}{x_0},\ y = \frac{x_2}{x_0}.$$

Definizione. 8 *La* chiusura proiettiva *della conica affine $\mathcal{C}$ e' la conica proiettiva $\overline{\mathcal{C}}$ definita dal polinomio omogeneo*

$$Q(x_0,x_1,x_2) = x_0^2 P\left(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}\right) = 0.$$

Dalla formula (9)*, questo e' equivalente a dire che l'equazione cartesiana di $\overline{\mathcal{C}}$ e':*

$$Q(x_0,x_1,x_2) = ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2 + dx_0x_1 + ex_0x_2 + fx_0^2 = 0. \tag{10}$$

Notiamo che, se $\mathcal{C}$ e' una conica affine a punti reali e non puntiforme, allora il supporto di $\mathcal{C}$ e' una curva di $\mathbb{R}^2$. Pertanto, la sua chiusura proiettiva e' quella curva proiettiva $\overline{\mathcal{C}} \subset \mathbb{P}^2$ tale che $\overline{\mathcal{C}} \cap A_0 = \mathcal{C}$.

Esempio. 9 Sia $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^2$ l'iperbole generale a punti reali, di equazione cartesiana

$$xy - x + y + 1 = 0.$$

Vedendo $\mathbb{R}^2$ come la carta affine A_0 di $\mathbb{P}^2$, la sua chiusura proiettiva $\overline{\mathcal{C}}$ e' la conica proiettiva generale a punti reali

$$x_1x_2 - x_0x_1 + x_0x_2 + x_0^2 = 0.$$

Notiamo che l'aver supposto $\mathbb{R}^2$ come la carta affine A_0 e' semplicemente una convenzione. Si sarebbe potuto indifferentemente considerare il piano affine $\mathbb{R}^2$ di partenza sia come la carta affine A_1 che come la carta affine A_2.

Quanto discusso precedentemente ci ha dato un modo naturale per associare ad una qualsiasi conica affine $\mathcal{C}$ vista come conica definita in A_0 una conica proiettiva $\overline{\mathcal{C}}$ in $\mathbb{P}^2$. Notiamo subito che il viceversa non sempre vale.

Esempio. 10 Sia $\overline{\mathcal{C}}$ e' la conica proiettiva di equazione cartesiana

$$x_0^2 + x_0x_1 + x_1^2 + x_1x_2 = 0.$$

Nella carta A_0, visto che

$$x = \frac{x_1}{x_0},\ y = \frac{x_2}{x_0},$$

dividendo per x_0^2 otteniamo

$$1 + x + x^2 + xy = 0$$

che e' l'equazione di una conica affine $\mathcal{C}$ in A_0, la cui chiusura proiettiva e' proprio $\overline{\mathcal{C}}$.
Se invece consideriamo $\overline{\mathcal{C}}$ la conica proiettiva di equazione cartesiana

$$x_0^2 + x_0x_1 = 0,$$

dividendo per x_0^2 otteniamo in A_0 l'equazione

$$1 + x = 0$$

che e' l'equazione cartesiana di una retta in $\mathbb{R}^2 = A_0$. In effetti, la conica $\overline{\mathcal{C}}$ era costituita da due rette incidenti in $\mathbb{P}^2$, dato che la sua equazione cartesiana si scrive anche

$$x_0(x_0 + x_1) = 0.$$

In altre parole, $\overline{\mathcal{C}}$ ha come componente la retta $x_0 = 0$. Poiche' questa retta, nella carta A_0, e' proprio la retta all'infinito di A_0 (e quindi non visibile nella carta A_0), la conica proiettiva in A_0 si riduce all'*affinizzazione* della retta proiettiva

$$r: \ (x_0 + x_1) = 0,$$

cioe' alla retta che si ottiene togliendo il punto all'infinito in A_0 di r.

Osservazione. In definitiva, se una conica proiettiva $\overline{\mathcal{C}}$ non contiene la retta impropria della carta A_0 come componente, la conica

$$\mathcal{C} = \overline{\mathcal{C}} \cap A_0$$

e' proprio una conica (cioe' non vi e' abbassamento di grado del polinomio che determina l'equazione cartesiana di $\mathcal{C}$ come avvenuto nell'esempio precedente). Inoltre, le principali proprieta' geometriche di $\overline{\mathcal{C}}$ (come essere a punti reali o meno, essere generale, semplicemente o doppiamente degenere, ecc...) si trasportano a $\mathcal{C}$. Analogo discorso si puo' fare per le carte affini A_1 ed A_2.

Definizione. 11 *Sia $\mathcal{C}$ una conica affine in $\mathbb{R}^2$. Se consideriamo $\mathbb{R}^2 = A_0$, i* punti impropri (od all'infinito) nella carta A_0 *della conica $\mathcal{C}$ sono dati da*

$$\overline{\mathcal{C}} \cap \{x_0 = 0\}$$

cioe' sono le soluzioni del sistema omogeneo

$$\begin{cases} ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2 + dx_0x_1 + ex_0x_2 + fx_0^2 &= 0 \\ x_0 &= 0, \end{cases}$$

equivalentemente del sistema omogeneo

$$\begin{cases} ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2 & = & 0 \\ x_0 & = & 0. \end{cases}$$

Osservazione. 12 Ovviamente la nozione di punto improprio od all'infinito dipende strettamente dalla carta affine che si sceglie. Per meglio comprendere quanto asserito, discutiamo il seguente esempio.

Esempio. 13 Consideriamo l'iperbole generale a punti reali

$$xy - x + 1 = 0$$

in $\mathbb{R}^2 = A_0$. La chiusura proiettiva $\overline{\mathcal{C}}$ di $\mathcal{C}$ ha equazione cartesiana

$$x_1x_2 - x_0x_1 + x_0^2 = 0.$$

Pertanto, i punti all'infinito di $\mathcal{C}$ nella carta A_0 sono dati dal sistema

$$\begin{cases} x_1x_2 & = & 0 \\ x_0 & = & 0. \end{cases}$$

cioe' sono i punti che, in $\mathbb{P}^2$ hanno coordinate omogenee

$$[0, 1, 0] \ \text{ e } \ [0, 0, 1].$$

Pero' $\overline{\mathcal{C}}$ induce anche una conica (ad esempio) nella carta A_1. Sia

$$\mathcal{C}' = \overline{\mathcal{C}} \cap A_1 \subset A_1 = \mathbb{R}^2.$$

Se denotiamo con (u, v) le coordinate di questo $\mathbb{R}^2$, visto che abbiamo supposto $\mathbb{R}^2 = A_1$, allora

$$u = \frac{x_0}{x_1}, \ v = \frac{x_2}{x_1};$$

percio', l'equazione cartesiana di $\mathcal{C}'$ in A_1 e':

$$v - u + u^2 = 0,$$

che, dalla ben nota classificazione affine delle coniche, e' una parabola generale. I punti impropri (in A_1) della parabola $\mathcal{C}'$ sono dati dal sistema

$$\begin{cases} x_0^2 & = & 0 \\ x_1 & = & 0. \end{cases}$$

cioe' e' il punto che, in $\mathbb{P}^2$, ha coordinate omogenee

$$[0, 0, 1]$$

contato con molteplicita' 2.
In definitiva, la medesima conica proiettiva generale ed a punti reali $\overline{\mathcal{C}}$ individua sia un'iperbole generale nella carta A_0 (con due punti impropri distinti) sia una

parabola generale nella carta A_1 (con un unico punto improprio di moteplicita' 2).

CLASSIFICAZIONE CONICHE AFFINI: studio dei punti impropri

Da quanto discusso precedentemente, per compiere la classificazione affine di una qualsiasi conica $\mathcal{C}$ di $\mathbb{R}^2$, si puo' procedere in modo alternativo a quello che utilizza le matrici simmetriche completa di $\mathcal{C}$ e della forma quadratica associata a $\mathcal{C}$. Infatti, si puo' procedere come segue:

(i) Come primo passo, si considera $\mathbb{R}^2$ come la carta A_0 di $\mathbb{P}^2$ e si considera la chiusura proiettiva $\overline{\mathcal{C}}$ di $\mathcal{C}$. Si considera quindi la classificazione proiettiva di $\overline{\mathcal{C}}$ come spiegato precedentemente, per comprendere se e' a punti reali o meno e se e' generale, semplicemente o doppiamente degenere.

(ii) Il secondo passo e' studiare in punti impropri di $\mathcal{C}$ in A_0. Infatti, una volta che si conoscono i punti impropri in A_0 delle forme canoniche affini delle coniche, basta vedere quale caso si realizza.

Concludiamo pertanto il paragrafo analizzando i punti impropri (nella carta A_0) di tutte le forme canoniche affini delle coniche.
Consideriamo $\mathbb{R}^2$ con coordinate affini (x, y), dove $\mathbb{R}^2 = A_0$.
(1) Consideriamo l'**ellisse generale** (a punti reali)

$$x^2 + y^2 = 1.$$

I suoi punti impropri sono definiti dal sistema

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 &= 0 \\ x_0 &= 0. \end{cases}$$

che non determina soluzioni reali.
(2) Consideriamo l'**ellisse generale a punti non-reali**

$$x^2 + y^2 = -1.$$

I suoi punti impropri sono definiti sempre dal sistema

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 &= 0 \\ x_0 &= 0. \end{cases}$$

che non determina soluzioni reali.
(3) Consideriamo l'**ellisse degenere**

$$x^2 + y^2 = 0.$$

I suoi punti impropri sono definiti sempre dal sistema

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 &= 0 \\ x_0 &= 0. \end{cases}$$

che non determina soluzioni reali.

(4) Consideriamo l'**iperbole generale**

$$x^2 - y^2 = 1.$$

I suoi punti impropri sono definiti dal sistema

$$\begin{cases} x_1^2 - x_2^2 & = & 0 \\ x_0 & = & 0. \end{cases}$$

che determina i punti che in $\mathbb{P}^2$ hanno coordinate

$$[0, 1, 1] \text{ e } [0, 1, -1].$$

(5) Consideriamo l'**iperbole degenere**

$$x^2 - y^2 = 0.$$

I suoi punti impropri sono definiti sempre dal sistema

$$\begin{cases} x_1^2 - x_2^2 & = & 0 \\ x_0 & = & 0. \end{cases}$$

che determina di nuovo i punti

$$[0, 1, 1] \text{ e } [0, 1, -1].$$

(6) Consideriamo la **parabola generale**

$$x^2 = y.$$

I suoi punti impropri sono definiti dal sistema

$$\begin{cases} x_1^2 & = & 0 \\ x_0 & = & 0. \end{cases}$$

che determina il punto

$$[0, 0, 1]$$

contato con molteplicita' 2.
(7) Consideriamo la **parabola semplicemente degenere**

$$x^2 = 1.$$

I suoi punti impropri sono definiti sempre dal sistema

$$\begin{cases} x_1^2 & = & 0 \\ x_0 & = & 0. \end{cases}$$

che determina sempre il punto

$$[0, 0, 1]$$

contato con molteplicita' 2.

(8) Consideriamo la **parabola semplicemente degenere a punti non reali**

$$x^2 = -1.$$

I suoi punti impropri sono definiti sempre dal sistema

$$\begin{cases} x_1^2 & = & 0 \\ x_0 & = & 0. \end{cases}$$

che determina sempre il punto

$$[0, 0, 1]$$

contato con molteplicita' 2.

(9) Consideriamo la **parabola doppiamente degenere**

$$x^2 = 0.$$

I suoi punti impropri sono definiti sempre dal sistema

$$\begin{cases} x_1^2 & = & 0 \\ x_0 & = & 0. \end{cases}$$

che determina sempre il punto

$$[0, 0, 1]$$

contato con molteplicita' 2.