

Universita' degli Studi di Roma "Tor Vergata"
Facolta' di Ingegneria Edile ed Edile/Architettura

Complementi di Geometria Proiettiva

Docente F. Flamini

POLARITA' DEFINITA DA UNA CONICA

§ 1 **Spazio vettoriale duale.** Ricordiamo che dato V spazio vettoriale, lo *spazio vettoriale duale di V* , denotato con V^* , e' lo spazio vettoriale

$$\text{Hom}(V, \mathbb{R})$$

delle applicazioni lineari da V in \mathbb{R} (equiv., dei *funzionali lineari* su V).

Se V ha dimensione $n + 1$, una volta fissata una qualsiasi base di V , lo spazio $V^* = \text{Hom}(V, \mathbb{R})$ e' lo spazio vettoriale delle matrici $(n + 1) \times 1$, una cui base e' data quindi dalle matrici riga

$$(1) \quad \bar{e}_i^* = (0, \dots, 0, 1^{\text{posto } i}, 0, \dots, 0), \quad 0 \leq i \leq n.$$

Pertanto anche $\dim(V^*) = n + 1$.

In particolare, se $e = \bar{e}_0, \bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n$ indica la base prefissata su V , cosicche' in base e si ha

$$\bar{e}_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1^{\text{posto } j} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad 0 \leq j \leq n$$

allora si ha

$$\bar{e}_i^*(\bar{e}_j) = \delta_{i,j}, \quad 0 \leq i, j \leq n$$

dove $\delta_{i,j}$ e' il *delta di Kronecher*.

Definizione. 1 La base $e^* := \bar{e}_0^*, \bar{e}_1^*, \dots, \bar{e}_n^*$ di V^* si chiama la *base duale della base e di V* .

Osservazione 2 In termini piu' concreti, una volta fissata la base e , la base e^* si puo' vedere naturalmente determinata dai **funzionali lineari coordinata**, cioe' si puo' porre

$$\bar{e}_i^* = X_i, \quad 0 \leq i \leq n,$$

dove X_i e' la coordinata od indeterminata che, come funzionale lineare associa ad un qualsiasi vettore $\bar{v} \in V$ la sua componente i -esima rispetto alla base e , i.e. se $\bar{v} = \sum_{i=0}^n v_i \bar{e}_i$ allora

$$X_i(\bar{v}) := v_i \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq i \leq n.$$

§2 **Piano proiettivo duale.** Sia ora V di dimensione 3. Fissiamo una base $e = \bar{e}_0, \bar{e}_1, \bar{e}_2$ di V , cosicche' $V \cong \mathbb{R}^3$. Ad ogni vettore $\bar{a} = a_0 \bar{e}_0 + a_1 \bar{e}_1 + a_2 \bar{e}_2 \in V$ resta naturalmente associato un funzionale lineare $f_{\bar{a}} \in (\mathbb{R}^3)^*$ definito in tal modo:

$$f_{\bar{a}}(\bar{v}) := \langle \bar{a}, \bar{v} \rangle = a_0 v_0 + a_1 v_1 + a_2 v_2, \quad \forall \bar{v} = v_0 \bar{e}_0 + v_1 \bar{e}_1 + v_2 \bar{e}_2 \in \mathbb{R}^3,$$

dove \langle, \rangle denota l'usuale prodotto scalare standard in \mathbb{R}^3 . In altre parole, si ha

$$f_{\bar{a}} = a_0 \bar{e}_0^* + a_1 \bar{e}_1^* + a_2 \bar{e}_2^* \in (\mathbb{R}^3)^*$$

od equivalentemente, da **Osservazione 2**,

$$f_{\bar{a}} = a_0 X_0 + a_1 X_1 + a_2 X_2.$$

Possiamo considerare un'applicazione lineare

$$\delta : \mathbb{R}^3 \rightarrow (\mathbb{R}^3)^*$$

definita da

$$\delta(\bar{a}) := f_{\bar{a}}.$$

Essa e' chiaramente un isomorfismo di spazi vettoriali, dato che e' un'applicazione lineare iniettiva tra due spazi vettoriali della stessa dimensione (ricordare Teorema di Nullita' piu' Rango). In particolare, grazie all'isomorfismo δ , abbiamo che

$$\mathbb{R}^3 \cong (\mathbb{R}^3)^*.$$

Tuttavia **in generale** non sussiste un isomorfismo tra V e V^* (precisamente sussiste se V e' euclideo); in altre parole l'isomorfismo δ e' *non-canonicalo*, dipende i.e. dalla scelta della base e di V .

D'ora in poi, consideriamo $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ con coordinate omogenee $[x_0, x_1, x_2]$. Per costruzione, ricordiamo che $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}(V)$, con V un qualsiasi spazio vettoriale di dimensione 3

$$(2) \quad \mathbb{P}(V) = \frac{V \setminus \{0\}}{\sim},$$

dove \sim denota la relazione di equivalenza definita dalla proporzionalita' (equiv. collinearita') di vettori in V .

Definizione. 3 Definiamo il piano proiettivo duale di \mathbb{P}^2 come

$$(\mathbb{P}^2)^* := \mathbb{P}((\mathbb{R}^3)^*)$$

nel senso di (2). L'isomorfismo δ sopra definito induce un isomorfismo di passaggio al duale, che indichiamo con

$$\tilde{\delta} : \mathbb{P}^2 \rightarrow (\mathbb{P}^2)^*$$

definito da

$$\tilde{\delta}([\bar{a}]) := [\delta(\bar{a})] = [f_{\bar{a}}], \quad \forall \bar{a} \in \mathbb{R}^3.$$

Osservazione 3 Si noti invece che esiste un'isomorfismo *canonico*, i.e. indipendente dalla scelta di una base, tra

$$V \cong (V^*)^*.$$

Definiamo infatti

$$\alpha : V \rightarrow (V^*)^*$$

ponendo, per ogni $\bar{v} \in V$, $\alpha(\bar{v}) \in (V^*)^*$ che e' quel funzionale lineare su V^* tale che, per ogni $f \in V^*$ si abbia

$$\alpha(\bar{v})(f) := f(\bar{v}) \in \mathbb{R}.$$

Passando in termini proiettivi, si ha in tal modo anche un isomorfismo canonico

$$\mathbb{P}^2 \cong (\mathbb{P}^2)^{**} := \mathbb{P}((V^*)^*).$$

Osservazione 4 Da Osservazione 2 sappiamo che ogni elemento di $f_{\bar{a}} = a_0\bar{e}_0^* + a_1\bar{e}_1^* + a_2\bar{e}_2^* \in (\mathbb{R}^3)^*$ puo' essere riguardato come una forma (cioe' un funzionale lineare)

$$a_0X_0 + a_1X_1 + a_2X_2,$$

dove X_0, X_1, X_2 sono le indeterminate associate alla base duale di e . Pertanto, il "punto" $[a_0X_0 + a_1X_1 + a_2X_2] \in (\mathbb{P}^2)^*$ si puo' identificare alla retta di \mathbb{P}^2 di equazione cartesiana

$$(3) \quad a_0X_0 + a_1X_1 + a_2X_2 = 0.$$

In altre parole, dato il punto $A = [a_0, a_1, a_2] \in \mathbb{P}^2$, ad esso corrisponde il "punto" $[a_0X_0 + a_1X_1 + a_2X_2] \in (\mathbb{P}^2)^*$ che non e' altro che una classe di equivalenza di funzionali lineari su \mathbb{R}^3 ; in altre parole un generico elemento rappresentato da $[a_0X_0 + a_1X_1 + a_2X_2]$ e' un funzionale lineare della forma

$$\lambda a_0X_0 + \lambda a_1X_1 + \lambda a_2X_2$$

per un qualche $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

Questo "punto" $[a_0X_0 + a_1X_1 + a_2X_2] \in (\mathbb{P}^2)^*$ si puo' interpretare come la retta $r_A \subset \mathbb{P}^2$ di equazione cartesiana (3). La retta r_A si chiama *retta duale del punto A*.

Osserviamo allora che $(\mathbb{P}^2)^*$ e' il luogo geometrico che **parametrizza** tutte le rette di \mathbb{P}^2 , i.e. ogni punto di $(\mathbb{P}^2)^*$ individua una ed una sola retta di \mathbb{P}^2 e viceversa. In definitiva ad ogni "punto" di $(\mathbb{P}^2)^*$ e' associata una ed una sola retta r_A di \mathbb{P}^2 il cui punto duale e' $A \in \mathbb{P}^2$ e viceversa.

Esempio Sia $\bar{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ un vettore espresso nelle sue componenti rispetto alla base canonica e di \mathbb{R}^3 . Il funzionale lineare

$$f_{\bar{a}} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

che questo vettore definisce e' l'elemento di $(\mathbb{R}^3)^*$ dato da

$$f_{\bar{a}} = \bar{e}_0^* + 3\bar{e}_2^* = X_0 + 3X_2$$

che e' quell'applicazione lineare che ad ogni vettore $\bar{v} = v_0\bar{e}_0 + v_1\bar{e}_1 + v_2\bar{e}_2 \in \mathbb{R}^3$ associa lo scalare $f_{\bar{a}}(\bar{v}) = v_0 + 3v_2$. Ad esempio, se $\bar{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, si ha $f_{\bar{a}}(\bar{v}) = 2 + 3 \cdot 5 = 17 \in \mathbb{R}$. Ora, il vettore \bar{a} individua il punto $A = [1, 0, 3] \in \mathbb{P}^2$ mentre il funzionale $f_{\bar{a}}$ individua il "punto" di $(\mathbb{P}^2)^*$ (cioe' una classe di proporzionalita' di funzionali lineari) dato da $[f_{\bar{a}}] = [X_0 + 3X_2]$. Tale punto si identifica alla retta $r_A : X_0 + 3X_2 = 0$ di \mathbb{P}^2 che e' la retta duale al punto A .

Abbiamo il seguente

Teorema. 5 (*Teorema di dualita'*) Date r_A e r_B due rette di \mathbb{P}^2 posto $C = r_A \cap r_B \in \mathbb{P}^2$, la retta r_C duale del punto C e' la retta congiungente i punti A e B di \mathbb{P}^2 che sono i punti duali di r_A ed r_B , rispettivamente.

Dimostrazione. Supponiamo che $r_A : a_0X_0 + a_1X_1 + a_2X_2 = 0$ e che $r_B : b_0X_0 + b_1X_1 + b_2X_2 = 0$. Il punto di intersezione $C = r_A \cap r_B$ ha coordinate omogenee date dalle soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} a_0X_0 + a_1X_1 + a_2X_2 = 0 \\ b_0X_0 + b_1X_1 + b_2X_2 = 0 \end{cases} .$$

Pertanto $C = [a_1b_2 - b_1a_2, b_0a_2 - a_0b_2, a_0b_1 - a_1b_0] \in \mathbb{P}^2$. Per quanto discusso precedentemente, la retta r_C duale di C ha equazione cartesiana

$$(4) \quad r_C : (a_1b_2 - b_1a_2)X_0 + (b_0a_2 - a_0b_2)X_1 + (a_0b_1 - a_1b_0)X_2 = 0.$$

Ricordiamo che, per quanto definito precedentemente, il punto A duale di r_A (risp., B duale di r_B) ha coordinate omogenee $[a_0, a_1, a_2] \in \mathbb{P}^2$ (risp. $[b_0, b_1, b_2] \in \mathbb{P}^2$). La dimostrazione si conclude osservando semplicemente che l'equazione cartesiana della retta congiungente i punti A e B si determina considerando

$$\det \begin{pmatrix} X_0 & X_1 & X_2 \\ a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \end{pmatrix} = 0,$$

che fornisce proprio l'equazione (4). \square

Corollario. 6 *Con le notazioni precedenti, dati $A, C \in \mathbb{P}^2$ si ha $A \in r_C$ se e solo se $C \in r_A$.*

§ 3 Correlazione del piano proiettivo. In questo paragrafo consideriamo $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, con coordinate omogenee $[x_0, x_1, x_2]$, e $(\mathbb{P}^2)^*$ con coordinate omogenee $[\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2]$. Sia $A = (a_{ij}) \in M(3 \times 3; \mathbb{R})$ una matrice, $0 \leq i, j \leq 2$. Consideriamo la seguente relazione matriciale

$$(5) \quad \lambda \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}^*;$$

in altri termini

$$(6) \quad \lambda \alpha_0 = \sum_{i=0}^2 a_{0i} x_i, \quad \lambda \alpha_1 = \sum_{i=0}^2 a_{1i} x_i, \quad \lambda \alpha_2 = \sum_{i=0}^2 a_{2i} x_i.$$

Definizione. 7. *Si dice che (5) definisce una correlazione*

$$\varphi = \varphi_A : \mathbb{P}^2 \rightarrow (\mathbb{P}^2)^*$$

che non e' altro che una proiettivita' che ad un punto $P = [p_0, p_1, p_2] \in \mathbb{P}^2$ associa il "punto" di $(\mathbb{P}^2)^$ di coordinate omogenee $[\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2] \in (\mathbb{P}^2)^*$ come in (6), dove $x_i = p_i$, $0 \leq i \leq 2$. Equivalentemente, φ associa al punto P la retta di \mathbb{P}^2 di equazione cartesiana*

$$(7) \quad \left(\sum_{i=0}^2 a_{0i} p_i \right) X_0 + \left(\sum_{i=0}^2 a_{1i} p_i \right) X_1 + \left(\sum_{i=0}^2 a_{2i} p_i \right) X_2 = 0.$$

La correlazione si dira' non degenera (rispettivamente, degenera) se la matrice A ha rango 3 (rispettivamente, ha rango minore di 3).

Osservazione 8 Sia $P = [p_0, p_1, p_2] \in \mathbb{P}^2$ e sia r la retta come in (7) ad esso correlata. Osserviamo che P in generale non appartiene ad r . Supponiamo che r

passi per un punto $Q = [q_0, q_1, q_2] \in \mathbb{P}^2$; in particolare

$$\left(\sum_{i=0}^2 a_{0i} p_i \right) q_0 + \left(\sum_{i=0}^2 a_{1i} p_i \right) q_1 + \left(\sum_{i=0}^2 a_{2i} p_i \right) q_2 = 0.$$

Tenendo presente (5), quest'ultima eguaglianza si puo' scrivere anche in forma matriciale

$$0 = (q_0, q_1, q_2) \begin{pmatrix} \lambda \alpha_0 \\ \lambda \alpha_1 \\ \lambda \alpha_2 \end{pmatrix} = (q_0, q_1, q_2) A \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}.$$

Poiche' pero' quest'ultima eguaglianza e' fra due numeri reali, la stessa eguaglianza sussiste se applichiamo la trasposizione di matrici. In altri termini, vale anche

$$0 = {}^t 0 = {}^t \left((q_0, q_1, q_2) A \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \right).$$

Poiche' e' ben noto che la trasposizione di matrici inverte l'ordine delle matrici, questa ultima eguaglianza diventa

$$0 = (p_0, p_1, p_2) {}^t A \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}.$$

Ne segue che allora il punto $P = [p_0, p_1, p_2] \in \mathbb{P}^2$ e' correlato con il "punto" di $(\mathbb{P}^2)^*$ di coordinate omogenee date da

$$\left[{}^t A \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \right] = \left[\sum_{j=0}^2 a_{j0} q_j, \sum_{j=0}^2 a_{j1} q_j, \sum_{j=0}^2 a_{j2} q_j \right] \in (\mathbb{P}^2)^*.$$

Si trova cosi' un'altra correlazione

$${}^t \varphi : \mathbb{P}^2 \rightarrow (\mathbb{P}^2)^*$$

detta la *correlazione trasposta* di φ , dato che e' determinata dalla matrice ${}^t A$ che e' la trasposta della matrice che determina la correlazione φ . In altri termini:

SIGNIFICATO GEOMETRICO se $Q = [q_0, q_1, q_2] \in \mathbb{P}^2$ appartiene alla retta di equazione cartesiana

$$\left(\sum_{i=0}^2 a_{0i} p_i \right) X_0 + \left(\sum_{i=0}^2 a_{1i} p_i \right) X_1 + \left(\sum_{i=0}^2 a_{2i} p_i \right) X_2 = 0$$

allora il punto $P = [p_0, p_1, p_2] \in \mathbb{P}^2$ appartiene alla retta di equazione cartesiana

$$\left(\sum_{j=0}^2 a_{j0} q_j \right) X_0 + \left(\sum_{j=0}^2 a_{j1} q_j \right) X_1 + \left(\sum_{j=0}^2 a_{j2} q_j \right) X_2 = 0$$

Esempio Sia $P = [4, 1, 5] \in \mathbb{P}^2$ e sia φ la correlazione non-degenere determinata dalla matrice (invertibile)

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pertanto il punto P e' correlato alla retta determinata da $\varphi_A(P) = \left[A \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \right] =$

$[9, 1, 11] \in (\mathbb{P}^2)^*$ cioe' la retta di equazione cartesiana

$$s : 9X_0 + X_1 + 11X_2 = 0.$$

Il punto $Q = [0, 11, -1] \in \mathbb{P}^2$ manifestamente appartiene alla retta s . Poiche'

$${}^t A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

da quanto discusso precedentemente deve discendere che il punto P deve appartenere alla retta ℓ individuata dalla correlazione trasposta ${}^t\varphi$, cioe' da

$$\varphi_{{}^t A}(Q) = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 11 \\ -1 \end{pmatrix} \right] = [-2, 8, 0] \in (\mathbb{P}^2)^*.$$

Infatti la retta ℓ ha quindi equazione cartesiana

$$\ell : X_0 - 4X_1 = 0$$

ed in effetti e' facile verificare che $P \in \ell$.

§4 Polarita' del piano proiettivo definita da una conica.

Definizione. 9. Se in (5) la matrice A e' simmetrica e non-degenere, allora la correlazione individuata da A ,

$$\varphi = \varphi_A : \mathbb{P}^2 \rightarrow (\mathbb{P}^2)^*,$$

si chiama polarita' di \mathbb{P}^2 . La retta $\varphi(P)$ correlata ad un punto P si chiama la polare di P , mentre il punto P si chiama il polo di $\varphi(P)$.

Osservazione 10 Essendo A simmetrica, e' chiaro che $\varphi = {}^t\varphi$. Inoltre, in generale il polo P non appartiene alla sua retta polare e, viceversa, in generale una retta non passa per il suo polo.

Esempio Sia $P = [4, 1, 5] \in \mathbb{P}^2$ e sia φ la polarita' determinata dalla matrice (invertibile e simmetrica)

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pertanto il punto P ha come retta polare la retta individuata da $\varphi_A(P) = \left[A \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \right] = [9, 3, 4] \in (\mathbb{P}^2)^*$ cioe' la retta di equazione cartesiana

$$9X_0 + 3X_1 + 4X_2 = 0.$$

Sostituendo dentro questa equazione le coordinate di P e' facile verificare che P non appartiene alla sua polare.

Osservazione 11 Poiche' per ipotesi A e' non degenera, l'equazione (5) si puo' risolvere rispetto alle coordinate omogenee $[x_0, x_1, x_2]$, i.e.

$$(8) \quad \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda A^{-1} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}^*.$$

Poiche' siamo in ambito proiettivo, si puo' moltiplicare ambo i membri della precedente eguaglianza per lo scalare non-nullo $\det(A)$ ottenendo cosi'

$$(9) \quad \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \gamma A^* \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}, \quad \gamma = \frac{\lambda}{\det(A)} \in \mathbb{R}^*,$$

dove A^* e' la *matrice aggiunta* di A , cioe' la trasposta della matrice dei *cofattori* (equiv. dei *complementi algebrici*) di A . Ma poiche' A e' simmetrica, anche A^* e' simmetrica, quindi coincide direttamente con la matrice dei *cofattori* (equiv. dei *complementi algebrici*) di A .

In definitiva (9) definisce quindi una polarita'

$$\varphi^* : (\mathbb{P}^2)^* \rightarrow \mathbb{P}^2$$

detta la *polarita' duale* di φ , cioe' quella polarita' che ad una qualsiasi retta r di \mathbb{P}^2 (corrispondente ad un punto $[r] \in (\mathbb{P}^2)^*$) associa il suo *polo* $\varphi^*([r]) \in \mathbb{P}^2$.

Notare che date due rette r e s e due punti P e Q , allora

- (i) la retta r e' la polare di P se $[r] = \varphi(P)$, e

(ii) il punto Q e' il polo di s se $Q = \varphi^*([s])$.

Notare inoltre che per costruzione si ha ovviamente

$$\varphi^* \circ \varphi = Id_{\mathbb{P}^2} \quad \varphi \circ \varphi^* = Id_{(\mathbb{P}^2)^*},$$

i.e. se la retta r e' la polare di P allora il polo di r e' P ; analogamente se Q e' il polo di una retta s , allora la polare di Q e' proprio s .

Esempio Dall'esercizio precedente, sia $P = [4, 1, 5] \in \mathbb{P}^2$ e sia φ la polarita' determinata dalla matrice (invertibile e simmetrica)

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ricordiamo che la retta polare di P era la retta r di equazione cartesiana

$$9X_0 + 3X_1 + 4X_2 = 0,$$

pertanto $[r] = [\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2] = [9, 3, 4] \in (\mathbb{P}^2)^*$. Calcoliamo ora la matrice dei cofattori di A , che e':

$$A^* := \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Per calcolare $\varphi^*([r])$ basta fare il conto

$$A^* \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ -3 \\ -15 \end{pmatrix}$$

che stabilisce che il polo di r e' il punto $P = [-12, -3, -15] = [4, 1, 5] \in \mathbb{P}^2$ come e' ovvio che fosse.

Proposizione. 12. *Siano P e Q due punti di \mathbb{P}^2 . Se P appartiene alla polare di Q , allora Q appartiene alla polare di P .*

Dimostrazione. Discende direttamente da Osservazione 8 con Significato Geometrico e dal fatto che A e' simmetrica. \square

Definizione. 13. *Due punti P e Q tali che ciascuno appartenga alla polare dell'altro si dicono coniugati (o reciproci) rispetto alla polarita' φ .*

Analogamente due rette r e s tali che ciascuna passi per il polo dell'altra si dicono coniugate (o reciproche) rispetto alla polarita' φ^ .*

Un punto P che appartiene alla sua polare si dice autoconiugato ed una retta che passi per il suo polo si dice autoconiugata.

Osservazione 13 Da quanto definito discende chiaramente che per trovare graficamente la polare di un punto P basta tracciare la retta passante per i poli di due qualsiasi rette del fascio di centro P . Viceversa, per trovare il polo di una retta r , basta prendere due punti distinti su r , determinare le loro polari e poi farne l'intersezione.

Osservazione 14 Se $P = [p_0, p_1, p_2] \in \mathbb{P}^2$ e' un punto autoconiugato, dal fatto che $a_{ij} = a_{ji}$, $0 \leq i, j \leq 2$, allora dal Significato Geometrico vuol dire che

$$\left(\sum_{i=0}^2 a_{0i} p_i \right) p_0 + \left(\sum_{i=0}^2 a_{1i} p_i \right) p_1 + \left(\sum_{i=0}^2 a_{2i} p_i \right) p_2 = 0.$$

Questa eguaglianza si puo' scrivere in termini matriciali come

$$(p_0, p_1, p_2) A \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = 0.$$

Pertanto, il luogo dei punti autoconiugati rispetto ad una polarita' φ definita da una matrice simmetrica A e' dato dai punti di una *conica* (proiettiva) $\Gamma = \Gamma_A$ di equazione cartesiana

$$(10) \quad (X_0, X_1, X_2) A \begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = a_{00} X_0^2 + a_{11} X_1^2 + a_{22} X_2^2 + 2a_{01} X_0 X_1 + 2a_{02} X_0 X_2 + 2a_{12} X_1 X_2 = 0.$$

In altre parole, la conica Γ e' la conica che ha come matrice simmetrica associata la matrice A che definisce la polarita' φ . Posto

$$F(X_0, X_1, X_2) = a_{00} X_0^2 + a_{11} X_1^2 + a_{22} X_2^2 + 2a_{01} X_0 X_1 + 2a_{02} X_0 X_2 + 2a_{12} X_1 X_2$$

e' immediato verificare che

$$(11) \quad (X_0, X_1, X_2) \cdot A = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial F}{\partial X_0}, \frac{\partial F}{\partial X_1}, \frac{\partial F}{\partial X_2} \right).$$

dove

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial F}{\partial X_0}, \frac{\partial F}{\partial X_1}, \frac{\partial F}{\partial X_2} \right) = \left(\sum_{i=0}^2 a_{0i} X_i, \sum_{i=0}^2 a_{1i} X_i, \sum_{i=0}^2 a_{2i} X_i \right).$$

Con questa interpretazione, dato un punto $P = [p_0, p_1, p_2] \in \mathbb{P}^2$, la sua retta polare e' la retta di equazione cartesiana

$$p_0 \frac{\partial F}{\partial X_0} + p_1 \frac{\partial F}{\partial X_1} + p_2 \frac{\partial F}{\partial X_2} = 0.$$

Utilizzando le espressioni delle derivate parziali precedentemente calcolate, l'equazione della polare diventa anche

$$(12) \quad \left(\frac{\partial F}{\partial X_0} \right) |_P X_0 + \left(\frac{\partial F}{\partial X_1} \right) |_P X_1 + \left(\frac{\partial F}{\partial X_2} \right) |_P X_2 = 0,$$

dove come consuetudine con il simbolo $\left(\frac{\partial F}{\partial X_i} \right) |_P$ si denota la valutazione della derivata parziale i -esima nel punto P , $0 \leq i \leq 3$. In particolare, si ha il seguente immediato risultato:

Corollario. 15 *Se Γ e' una conica a punti reali e $P \in \Gamma$, allora la polare di P non e' altro che la retta tangente a Γ in P .*

Osservazione 16 Osserviamo che, per come abbiamo definito le polarita', la matrice A e' sempre non-degenere (cioe' di rango 3). Pertanto la conica Γ e' sempre una conica generale. Pertanto il Corollario 15 fornisce questa interessante interpretazione geometrica della polare nel caso in cui Γ sia a punti reali. In effetti, essendo non degenere ed a punti reali, ogni punto di Γ ammette una ben determinata retta tangente. Effettivamente ci sono anche estensioni di queste nozioni a coniche (e quindi polarita') degeneri, ma non fanno parte dell'obiettivo di questi brevi note.

Esempio Dall'esercizio precedente, sia φ la polarita' determinata dalla matrice (invertibile e simmetrica)

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pertanto, la conica Γ dei punti autoconiugati rispetto a φ e' la conica proiettiva di equazione cartesiana

$$X_0^2 + 2X_0X_2 + 3X_1^2 = 0.$$

Poiche' il punto $[0, 0, 1] \in \Gamma$, dal fatto che A e' non degenere e dalla classificazione proiettiva delle coniche, Γ e' necessariamente una conica proiettiva generale a punti reali. Calcoliamo

$$(X_0, X_1, X_2) \cdot A = (X_0 + X_2, 3X_1, X_0)$$

e contemporaneamente

$$\left(\frac{\partial F}{\partial X_0}, \frac{\partial F}{\partial X_1}, \frac{\partial F}{\partial X_2} \right) = (2(X_0 + X_2), 6X_1, 2X_0)$$

che verifica - come doveva essere - la relazione (11).

Notiamo che

$$\left(\frac{\partial F}{\partial X_0} \Big|_P, \frac{\partial F}{\partial X_1} \Big|_P, \frac{\partial F}{\partial X_2} \Big|_P \right) = (1, 0, 0).$$

In altre parole troviamo - come doveva essere - che Γ e' una conica non singolare in P dato che il gradiente del polinomio omogeneo $F(X_0, X_1, X_2)$ che definisce l'equazione cartesiana di Γ non si annulla in P . Piu' precisamente il gradiente di F non si annulla in nessun punto del piano proiettivo, dato che porre

$$(2(X_0 + X_2), 6X_1, 2X_0) = (0, 0, 0)$$

ha come unica soluzione $X_0 = X_1 = X_2 = 0$ che non corrisponde a nessun punto di \mathbb{P}^2 . A fortiori, ritroviamo che la conica Γ , non essendo singolare in alcun punto, e' sicuramente generale.

La retta polare di P e' quindi la retta di equazione

$$X_0 = 0.$$

Verifichiamo in due modi differenti che tale retta e' la tangente alla conica Γ nel punto P .

- (1) Intersecando la conica Γ con la retta di equazione $X_0 = 0$, si determina il sistema

$$3X_1^2 = 0 = X_0$$

che ha come soluzione il punto $P = [0, 0, 1]$ contato con molteplicita' di intersezione uguale a 2. Essendo P un punto non singolare di Γ questo necessariamente comporta che $X_0 = 0$ e' la retta tangente a Γ in P .

- (2) Per calcolare la tangente a Γ in P , conviene passare a coordinate affini. Ovviamente $P \in A_2 \subset \mathbb{P}^2$. In questa carta affine P diventa il punto origine e la conica assume l'equazione

$$f(s, t) = s^2 + 2s + t^2 = 0,$$

dove come usuale $s = \frac{X_0}{X_2}, t = \frac{X_1}{X_2}$ sono le coordinate affini della carta A_2 . Poiche' il punto in cui dobbiamo calcolare la retta tangente alla conica affine $\Gamma' := \Gamma \cap A_2$ e' l'origine, sappiamo che la sua equazione e' semplicemente data dall'annullarsi dei termini lineari come discende immediatamente dalla formula del polinomio di Taylor e dal fatto che $f(s, t) = 0$ e' un polinomio. Pertanto, la tangente a Γ' nell'origine e' $s = 0$. La chiusura proiettiva di tale tangente e' ovviamente la tangente alla conica proiettiva Γ e, visto che siamo nella carta affine A_2 , la chiusura proiettiva della tangente e' effettivamente la retta proiettiva di equazione $X_0 = 0$.