

(i) $P_0 = [1, 2, -1]$, $P_1 = [0, 1, 1]$, $P_2 = [2, 1, 5]$, $P_3 = [1, -2, -5]$
punti in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$

$$\text{reg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 5 & -5 \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow \text{quattro non in posizione generale}$$

(ii) $\pi := \mathcal{L}(P_0, P_1, P_2, P_3)$ è una retta in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$

Poiché $P_i \neq P_j \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, $\forall 0 \leq i \neq j \leq 3$

$\pi = \mathcal{L}(P_0, P_1)$ ad esempio

Eq. parametriche omogenee dire

$$P_0 = [1, 2, -1] \\ P_1 = [0, 1, 1]$$

$$\begin{cases} x_0 = \lambda \cdot 1 + \mu \cdot 0 \\ x_1 = \lambda \cdot 2 + \mu \cdot 1 \\ x_2 = \lambda \cdot (-1) + \mu \cdot 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = \lambda \\ x_1 = 2\lambda + \mu \\ x_2 = -\lambda + \mu \end{cases}, [\lambda, \mu] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$$

Eq. cartesiane omogenee dire

$$\text{reg} \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

$$\Leftrightarrow \text{det} \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\pi: 3x_0 - x_1 + x_2 = 0$$

(iii) $S: x_1 - x_2 = 0$ retta di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$

$$\pi \cap S = \begin{cases} 3x_0 - x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1 = x_2 \end{cases}$$

$$\pi \cap S = P_1 = [0, 1, 1] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$$

Per Grassmann $\overset{1}{\parallel} \overset{1}{\parallel} \overset{0}{\parallel}$
 $\dim(\mathcal{L}(\pi, S)) = \dim(\pi) + \dim(S) - \dim(\pi \cap S) = 2$

$\Rightarrow$ π e S in posizione generale in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$

In fatto per due rette in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$:

(2)

Visto che

$$\dim(\mathcal{L}(r, s)) \leq \dim(\mathbb{P}^2(\mathbb{R})) = 2$$

Per Grassmann proiettivo

$$1 \geq \overset{r \cap s \subset r, s}{\dim(r \cap s)} = \dim(r) + \dim(s) - \dim(\mathcal{L}(r, s)) \\ = 2 - \dim(\mathcal{L}(r, s)) \geq 0$$

$\dim(r \cap s)$ ha raggiunto minimo $= 0 \Rightarrow$ posizione generale per le 2 rette

Due rette in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ $\begin{cases} \rightarrow \text{coincidenti (posizione non generale)} \\ \rightarrow \text{incidenti (pos. generale)} \end{cases}$

(iii) In $A_0 = \{ [x_0, x_1, x_2] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \mid x_0 \neq 0 \} \subset \mathbb{P}^2$
pongo coordinate affini in A_0

$$\begin{cases} x := \frac{x_1}{x_0} & y := \frac{x_2}{x_0} \end{cases} \Rightarrow A_0 \equiv \mathbb{A}^2_{(x, y)}$$

$r_0 := r \cap A_0$; $x - y - 3 = 0 \Rightarrow r_0$ è retta affine per punto

$\downarrow$
retta affine in A_0
che è traccia di retta
proiettiva $r \subset \mathbb{P}^2$

$$P_0 = [1, 2, -1] \in A_0 \\ = (2, -1) \in \mathbb{A}^2_{(x, y)}$$

con vettore direttore
individuato da

$$P_1 = [0, 1, 1]$$

$\downarrow$
improprio o all'infinito
per A_0

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \text{ vett. direttore} \\ \text{di } r_0$$

$$s_0 := s \cap A_0; \quad x - y = 0$$

$$a_0 \in A_0 \equiv \mathbb{A}^2_{(x, y)} \Rightarrow r_0 \parallel s_0 \text{ cioè } r_0 \cap s_0 = \emptyset \text{ in } A_0$$

Ma in fatti

$$(r_0)_\infty = (s_0)_\infty = P_1 = [0, 1, 1]$$

$$\parallel \\ r \cap s \subset \mathbb{P}^2$$

M Nelle carte affini

(3)

$$A_1: \quad u = \frac{x_0}{x_1} \quad v = \frac{x_2}{x_1} \quad (x_1 \neq 0) \Rightarrow A_{(u,v)}^2 \equiv A_1$$

Punti impropri di A_1 sono $[\alpha, 0, \beta]$, con $[\alpha, \beta] \in \mathbb{P}^1$

$$\pi_1 := \pi \cap A_1: \quad 3u + v - 1 = 0 \quad \left(\begin{array}{l} \text{retta affine tracciata in } A_1 \\ \text{di } \pi \subset \mathbb{P}^2 \end{array} \right)$$

$$s_1 := s \cap A_1: \quad v - 1 = 0 \quad \left(\begin{array}{l} \text{retta affine tracciata in } A_1 \\ \text{di } s \subset \mathbb{P}^2 \end{array} \right)$$

$$\text{In } A_1 = A_{(u,v)}^2, \quad \pi_1 \cap s_1 = \begin{cases} u = 0 \\ v = 1 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \pi_1 \cap s_1 = P_1 = [0, 1, 1] \\ = (0, 1) \in A_1$$

P_1 era visibile in $A_1 = A_{(u,v)}^2$

* Anvolgimento in carta affine

$$A_2: \quad z = \frac{x_0}{x_2}, \quad w = \frac{x_1}{x_2} \quad (x_2 \neq 0) \Rightarrow A_{(z,w)}^2 \equiv A_2$$

$$\pi_2 := \pi \cap A_2: \quad 3z - w + 1 = 0$$

$$s_2 := s \cap A_2: \quad z - 1 = 0$$

$$\pi_2 \cap s_2 = \begin{cases} 3z - w + 1 = 0 \\ w = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 0 \\ w = 1 \end{cases}$$

$$\pi_2 \cap s_2 = P_1 = [0, 1, 1] = (0, 1) \in A_2$$

P_1 era visibile anche in A_2

Per tanto le tracce di π e s nelle carte affini determinano

coppia rette affini

parallele in A_0
incidenti in A_1
incidenti in A_2

a) $A^3_{\mathbb{R}}$ (x, y, z) coord. affini

$\pi: 2x + 3y + z = 1$ piano affine in $A^3_{\mathbb{R}}$

$r: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = P + t \underline{v}_r$ retta affine in $A^3_{\mathbb{R}}$

In $A^3_{\mathbb{R}}$ noto che

$P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \notin \pi$ però $\underline{v}_r \in \pi_0: 2x + 3y + z = 0$
 $\downarrow$ giacitura di π

$\Rightarrow \boxed{r \parallel \pi \text{ ma } r \not\subset \pi \text{ in } A^3_{\mathbb{R}}}$

Considerando $A^3_{\mathbb{R}} := A_0 \subset \mathbb{P}^3 \Rightarrow$ prendo coordinate affini

$$x = \frac{x_1}{x_0}$$

$$y = \frac{x_2}{x_0}$$

$$z = \frac{x_3}{x_0}$$

* $\overline{\pi} =$ completamento proiettivo di π in $\mathbb{P}^3 = \pi \cup \pi_{\infty}$

$$\overline{\pi}: 2x_1 + 3x_2 + x_3 - x_0 = 0$$

π_{∞} corrisponde a
 $\downarrow$
retta proiettiva su piano
proiettivo $\{x_0 = 0\}$

$$\begin{cases} \overline{\pi} \\ x_0 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases}$$

$\Downarrow$ corrisp. 1-1

$\left\{ \frac{\text{vettori della giacitura}}{\pi_0 \text{ di } \pi} \right\}$

$$\pi_{\infty} = \left\{ [0, 3s+t, -2s, -2t] \mid [s, t] \in \mathbb{P}^1 \right\}$$

$\pi_{\infty} =$ retta di punti impropri e dell'infinito di π

* $\overline{r} =$ chiusura proiettiva di r in $\mathbb{P}^3 = r \cup r_{\infty}$

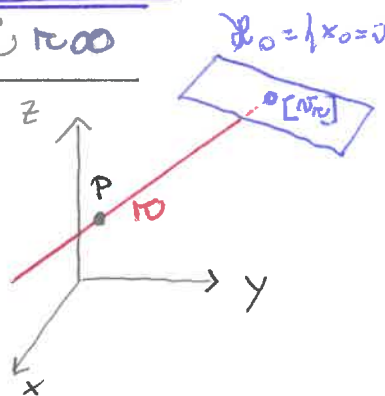
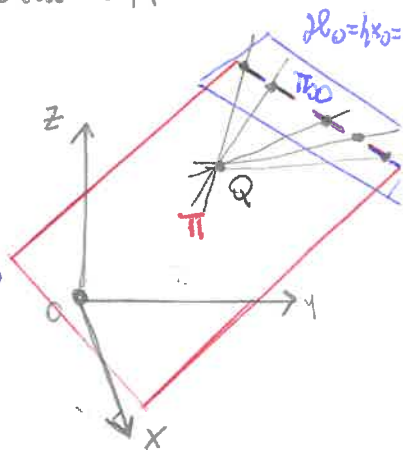
$$\overline{r} = \mathcal{L}(P, P_{\infty}) \text{ dove}$$

$$P = [1, 1, 0, 1] = P = (-1, 0, 1) \in A^3_{\mathbb{R}}$$

$$P_{\infty} = [0, 1, 0, -2] = [\underline{v}_r]$$

$$\Rightarrow \overline{r}: \underline{x} = \lambda P + \mu P_{\infty}, [\lambda, \mu] \in \mathbb{P}^1 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_0 = \lambda \\ x_1 = \lambda + \mu \\ x_2 = 0 \\ x_3 = \lambda - 2\mu \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{eq. parametriche} \\ \text{omogenee di} \\ \overline{r} \text{ in } \mathbb{P}^3 \end{array}$$



$\pi: \text{reg} \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow$ Kronecker formisce

$\pi: \begin{cases} x_2 = 0 \\ 3x_0 - 2x_1 - x_3 = 0 \end{cases}$

Ora

$\pi \cap \pi: \begin{cases} x_2 = 0 \\ 3x_0 - 2x_1 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - x_0 = 0 \end{cases}$

Poiché in $A_0: \pi \cap \pi = \emptyset$ (perché $\pi \parallel \pi$ in $A_0 = A^3_{(x,y,z)}$)

$\Rightarrow \pi \cap \pi \subset \{x_0 = 0\} = \mathcal{H}_0$ è un punto improprio per $A_0 = A^3_{(x,y,z)}$

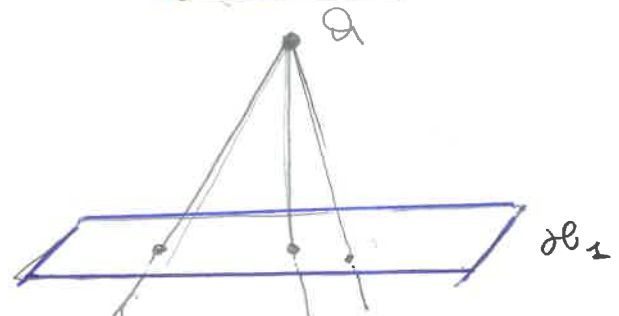
In fatti: $\begin{cases} x_2 = 0 \\ x_0 = 0 \\ 2x_1 + x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_1 = \lambda \\ x_3 = -2\lambda \end{cases} \Rightarrow [0, 1, 0, -2]$
 $\pi_{\infty} = [\pi]$

Giustamente ($\pi \parallel \pi$ in A_0)

$\pi_{\infty} \in \pi_{\infty}$ ottenuto per $[s, t] = [0, 1]$ come punto di π_{∞}

(ii) Prendo $Q = [0, 1, 0, -2] = [\pi]$ e faccio
Proiezione da Q su piano $\mathcal{H}_1: \{x_1 = 0\}$

Q e $\mathcal{H}_1$ sottospazi sghembi di $\mathbb{P}^3$ perché $Q \notin \mathcal{H}_1$
 $\Rightarrow Q \cap \mathcal{H}_1 = \emptyset$



Corrispondenza 1-1
 $\{\text{stelle rette proiettive per } Q\} \leftrightarrow \{\text{punti di } \mathcal{H}_1\}$

(3)

Infatti

* $\forall$ retta π_Q discendente da Q e t.c. $\pi_Q \notin \mathcal{H}_1$
 perché $Q \notin \mathcal{H}_1$

Poiché $\pi_Q \cap \mathcal{H}_1 \subseteq \pi_Q \Rightarrow$

$$\dim(\pi_Q \cap \mathcal{H}_1) \leq \dim(\pi_Q) = 1 \quad (1)$$

Ora per Grassmann proiettivo

$$\dim(\pi_Q \cap \mathcal{H}_1) \stackrel{\text{Grassmann}}{=} \underbrace{\dim(\pi_Q)}_1 + \underbrace{\dim(\mathcal{H}_1)}_2 - \dim(\mathcal{L}(\pi_Q, \mathcal{H}_1))$$

Ora $\mathcal{L}(\pi_Q, \mathcal{H}_1) =$ sottosp. congiungente $\mathcal{H}_1$ e π_Q

$$\cap \mathbb{P}^3(\mathbb{R})$$

$$\Rightarrow \dim(\mathcal{L}(\pi_Q, \mathcal{H}_1)) \leq \dim(\mathbb{P}^3) = 3$$

$$\Rightarrow \dim(\pi_Q \cap \mathcal{H}_1) = 1 + 2 - \dim(\mathcal{L}(\pi_Q, \mathcal{H}_1)) \geq 3 - 3 = 0 \quad (2)$$

Perciò $0 \leq \dim(\pi_Q \cap \mathcal{H}_1) \leq 1$

Ma se fosse $\dim(\pi_Q \cap \mathcal{H}_1) = 1 \Rightarrow \dim(\pi_Q \cap \mathcal{H}_1) = \dim(\pi_Q) = 1$ i.e. $\pi_Q \subseteq \mathcal{H}_1 \not\equiv Q \notin \mathcal{H}_1$

$\Downarrow$
 $\dim(\pi_Q \cap \mathcal{H}_1) = 0 \quad \forall \pi_Q$
 cioè ogni retta π_Q involuoliva! punto su $\mathcal{H}_1$

* Viceversa, $\forall$ punto $K \in \mathcal{H}_1 \Rightarrow \exists !$ retta di $\mathbb{P}^3$

$\pi_Q := \mathcal{L}(Q, K)$ passante per K e Q

$\Rightarrow$ ogni punto K di $\mathcal{H}_1$ involuoliva! retta π_Q delle stelle di rette di centro Q

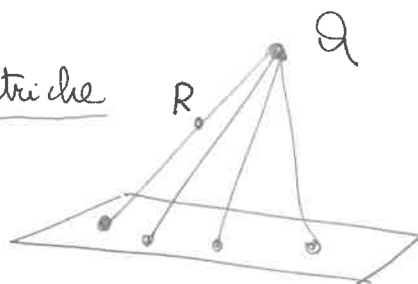
$$\forall R = [\alpha, \beta, \gamma, \delta] \in \mathbb{P}^3(\mathbb{R}) \setminus \{Q\}$$

(4)

$$\pi_Q: \mathcal{L}(Q, R): \underline{x} = \lambda Q + \mu R, \text{ con } [\lambda, \mu] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$$

$$(*) \begin{cases} x_0 = \mu \alpha \\ x_1 = \lambda + \mu \beta \\ x_2 = \mu \gamma \\ x_3 = -2\lambda + \mu \delta \end{cases}$$

eq. parametriche
 π_Q



Taglio con $\mathcal{H}_1: \{x_1=0\}$

$$(*) \Rightarrow \boxed{\lambda = -\mu \beta} \quad (**)$$

se $\mu=0$ $\Rightarrow \lambda=0$ ~~ma~~ ma in fatti $\mu=0 \xleftrightarrow{\text{su } \pi_Q} Q \notin \mathcal{H}_1$

se $\beta=0$ $\Rightarrow \lambda=0 \Rightarrow$ su $\mathcal{L}(Q, R)$ a vero quindi

$$\begin{cases} x_0 = \mu \alpha \\ x_1 = 0 \\ x_2 = \mu \gamma \\ x_3 = \mu \delta \end{cases} \quad R = [\alpha, 0, \gamma, \delta] \in \mathcal{H}_1 = \{x_1=0\}$$

R già sul piano $\mathcal{H}_1$

se $\beta \neq 0$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \lambda = -\mu \beta \\ &\begin{cases} x_0 = \mu \alpha \\ x_1 = -\mu \beta + \mu \beta = 0 \\ x_2 = \mu \gamma \\ x_3 = +2\mu \beta + \mu \delta = \mu(2\beta + \delta) \end{cases} \end{aligned}$$

$$\boxed{\pi_Q(R) := [\alpha, 0, \gamma, 2\beta + \delta] \in \mathcal{H}_1}$$

Formula proiezione
 $\pi_Q: \mathbb{P}^3 \setminus \{Q\} \rightarrow \mathcal{H}_1$

Perciò

$$\boxed{\pi_Q: \mathbb{P}^3 \setminus \{Q\} \longrightarrow \mathcal{H}_1}$$

π_Q non è definita in Q

$$\dim(\mathcal{H}_1) = 3 - 1 = 2 \quad \text{piano di } \mathbb{P}^3$$

$$\mathcal{H}_1 \cong \mathbb{P}^2$$

Fatto 1

$$\text{Se } V = U \oplus W \Rightarrow V/W \cong U$$

In fatti

$\forall \underline{v} \in V$ si scrive in modo! come

$$\underline{v} = \underline{u} + \underline{w}$$

$$! \underline{u} \in U \text{ e } ! \underline{w} \in W$$

$$\text{Siccome } V/W \ni [\underline{v} + W] \stackrel{\downarrow}{\substack{\underline{v} - \underline{u} \in W \\ \underline{u} \in U}} [\underline{u} + W] \xrightarrow{\varphi_0 \cong} \underline{u} \in U$$

in fatti $\dim(U) = \dim(V) - \dim(W) = \dim(V/W)$

Fatto 2

Nel nostro caso $V = \mathbb{R}^4 \rightsquigarrow \mathbb{P}^3 = \mathbb{P}(V)$

$$W_Q = \text{Span}(\underline{v}_Q) \text{ dove } Q = [\underline{v}_Q] = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right]$$

$$V = W_Q \oplus U \text{ con } U \cong V/W_Q \text{ ottenuto}$$

completando $\{\underline{v}_Q\}$ ad una base per $V = \mathbb{R}^4$

Ma in fatti $\mathcal{H}_1: \{x_1 = 0\} \subset \mathbb{P}^3$

Corrisponde a Iperpiano $U = \{x_1 = 0\} \subset \mathbb{R}^4 = \text{Span}\{\underline{e}_0, \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$

$$U = \text{Span}\{\underline{e}_0, \underline{e}_2, \underline{e}_3\} \subset \mathbb{R}^4$$

e $W_Q \oplus U = \text{Span}\{\underline{v}_Q, \underline{e}_0, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$

Perciò

$$\begin{array}{ccccc} V & \xrightarrow{\pi} & V/W_Q & \xrightarrow{\varphi_0 \cong} & U \\ \forall \underline{v} = t\underline{v}_Q + \underline{u} & \longrightarrow & [\underline{u}] & \longrightarrow & \underline{u} \\ & \downarrow \text{comb. lin. di } \underline{e}_0, \underline{e}_2, \underline{e}_3 & \downarrow \text{comb. lin. di } \underline{e}_0, \underline{e}_2, \underline{e}_3 & & \\ & [\underline{v} + W_Q] & & & \end{array}$$

- π applicazione lineare suriettiva
 - φ_0 isomorfismo
- $\Rightarrow \varphi_0 \circ \pi$
suriettiva
da V ad U

$$V \xrightarrow{\pi} V/W_Q$$

$$\ker(\pi) = W_Q$$

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\pi} & V/W_Q \xrightarrow{\varphi_0 \cong} U \\ \cup & & \\ W_Q & \longrightarrow & [0] \longrightarrow 0 \end{array}$$

Se proiettivo

$$\mathbb{P}^3 = \mathbb{P}(V) \xrightarrow{\mathbb{P}(\varphi_0 \circ \pi) = \pi_Q} \mathbb{P}(U) = \mathcal{H}_1$$

non è applicazione definita su tutto $\mathbb{P}(V)$

perché $\pi_Q(\mathbb{P}(W_Q)) = \pi_Q([0_Q]) = \pi_Q(Q) \notin \mathcal{H}_1$

$$W_Q = \text{Span}\{v_Q\}$$

infatti $[0] \notin \mathbb{P}(U)$

$\Rightarrow \bullet \mathcal{H}_1 = \mathbb{P}(U) \cong \mathbb{P}(V/W_Q)$ è modello di $\mathbb{P}(V/W_Q)$

$\bullet \pi_Q$ è modello di $\mathbb{P}(\pi)$ con $\pi: V \rightarrow V/W_Q$.

(iii) Siccome $Q \in \overline{\mathcal{H}_1} \Rightarrow \pi_Q(\overline{\mathcal{H}_1})$ si costruisce ad un punto su $\mathcal{H}_1$

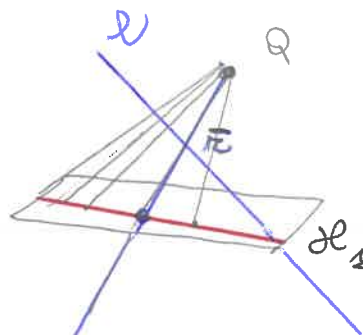
$$\overline{\mathcal{H}_1} : \begin{cases} x_0 = \lambda \\ x_1 = \lambda + \mu \\ x_2 = 0 \\ x_3 = \lambda - 2\mu \end{cases} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{bmatrix} \Rightarrow \pi_Q(\overline{\mathcal{H}_1}) = [\lambda, 0, 0, 2(\lambda + \mu) + \lambda - 2\mu] = [\lambda, 0, 0, 3\lambda] = [1, 0, 0, 3] \in \mathcal{H}_1$$

Invece la retta

$$l: \begin{cases} x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$$

$\bar{e} \in l$ c. $l \not\subset \mathcal{H}_1$ e $Q \notin l$

$\Rightarrow \pi_Q(l)$ si proietta in una retta sul piano $\mathcal{H}_1$



$$l: \begin{cases} x_0 = s \\ x_1 = t \\ x_2 = t \\ x_3 = 0 \end{cases} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{bmatrix}$$

con $[s, t] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \Rightarrow$

$\pi_Q(\ell) = [s, 0, t, 2t], [s, t] \in \mathbb{P}^2$ è una retta su $\mathcal{H}_1: \{x_1 = 0\}$ (7)

$\Rightarrow$ eq. cartesiane omogenee $\pi_Q(\ell): \begin{cases} x_1 = 0 \rightarrow \text{piano } \mathcal{H}_1 \text{ di } \mathbb{P}^3(\mathbb{R}) \\ x_3 - 2x_0 = 0 \rightarrow \text{piano } \alpha \text{ di } \mathbb{P}^3(\mathbb{R}) \end{cases}$

(iv) Come prima, $V = \mathbb{R}^4$ con prodotto poniamo $(\mathbb{P}^3)^* := \mathbb{P}(V^*)$ spazio proiettivo duale di $\mathbb{P}^3$

Visto che $\pi_Q(\ell) = \begin{cases} \alpha \longleftrightarrow \text{piano di } \mathbb{P}^3 \\ \mathcal{H}_1 \longleftrightarrow \text{piano di } \mathbb{P}^3 \end{cases}$

$\Rightarrow \pi_Q(\ell) = \mathbb{P}(\ker(\underline{e}_1^*)) \cap \mathbb{P}(\ker(2\underline{e}_0^* - \underline{e}_3^*))$

i.e. $\pi_Q(\ell) = \mathbb{P}(\text{Ann}_V \{ \underline{e}_1^*, 2\underline{e}_0^* - \underline{e}_3^* \}) \subset \mathbb{P}(V) = \mathbb{P}^3(\mathbb{R})$

$\dim(\text{Ann}_V(\underline{e}_1^*, 2\underline{e}_0^* - \underline{e}_3^*)) = 4 - 2 = 2 \Rightarrow \dim(\pi_Q(\ell)) = 1$ (ok)

e $\pi_Q(\ell)$ visto come asse del fascio di iperpiani in $\mathbb{P}^3$ generato da $\mathcal{H}_1$ e α

Contemporaneamente $W_\ell = \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_3 - 2x_0 = 0 \end{cases}$ è ssp. vett. di $V = \mathbb{R}^4$

con $W_\ell = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ e $\mathbb{P}(W_\ell) \subset \mathbb{P}(V) = \mathbb{P}^3$ sottosp. proiettivi di $\mathbb{P}(V)$
 $\parallel$
 $\pi_Q(\ell)$

(v) $\mathcal{H}_1: \{x_1 = 0\} \in \mathbb{P}(\ker(\underline{e}_1^*))$ con $E^* = \{\underline{e}_0^*, \underline{e}_1^*, \underline{e}_2^*, \underline{e}_3^*\}$
base duale di $E = \{\underline{e}_0, \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$

$\Rightarrow P_{\mathcal{H}_1} = [0, 1, 0, 0] \in \mathbb{P}(V^*) = (\mathbb{P}^3)^*$ punto

$\alpha: \{2x_0 - x_3 = 0\} \in \mathbb{P}(\ker(2\underline{e}_0^* - \underline{e}_3^*))$

$\Rightarrow P_\alpha = [2, 0, 0, -1] \in \mathbb{P}(V^*) = (\mathbb{P}^3)^*$ punto

Portanto i 2 iperpiani di $\mathbb{P}^3$ $\mathcal{H}_1$ e α

corrispondono a due punti di $(\mathbb{P}^3)^*$

$P_{\mathcal{H}_1}$ e P_α

$\mathbb{P}^3$ la retta proiettiva congiungente questi 2 punti (8)

$\mathcal{L}(P_{H_1}, P_{\alpha}) \subset (\mathbb{P}^3)^*$ retta proiettiva $(\mathbb{P}^3)^*$

$[a_0, a_1, a_2, a_3]$ coord. punto in $(\mathbb{P}^3)^*$ $\longleftrightarrow \begin{cases} a_0 x_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0 \\ \text{iperpiano di } \mathbb{P}^3 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_0 = 2\lambda + 0\mu \\ a_1 = 0\lambda + \mu \\ a_2 = 0 \\ a_3 = -\lambda \end{cases} \quad \begin{cases} a_0 = 2\lambda \\ a_1 = \mu \\ a_2 = 0 \\ a_3 = -\lambda \end{cases}$$

$\Rightarrow$ iperpiani di $\mathbb{P}^3$ formano spazio proiettivo $(\mathbb{P}^3)^*$

eq. parametriche omogenee di retta
 $\mathcal{L}(P_{H_1}, P_{\alpha}) \subset (\mathbb{P}^3)^*$

$$\mathcal{L}(P_{H_1}, P_{\alpha}) : \begin{cases} a_0 + 2a_3 = 0 \\ a_2 = 0 \end{cases}$$

eq. cartesiane omogenee di retta
 $\mathcal{L}(P_{H_1}, P_{\alpha}) \subset (\mathbb{P}^3)^*$

Come le interpretare nell'insieme $\{\text{iperpiani di } \mathbb{P}^3\} = (\mathbb{P}^3)^*$?

$$\lambda P_{\alpha} + \mu P_{H_1} \text{ in } (\mathbb{P}^3)^* \quad [\lambda, \mu] \in \mathbb{P}^1$$



$$2\alpha + \mu H \text{ in } \mathbb{P}^3 \quad [\lambda, \mu] \in \mathbb{P}^1$$

$$2(2x_0 - x_3) + \mu x_1 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{2\lambda x_0 + \mu x_1 - 2x_3 = 0} \quad \text{equazione fascio di piani di asse } \pi_Q(\ell) \text{ in } \mathbb{P}^3$$

$$\dim(\mathcal{F}_{\lambda, \mu}) = 1 = \dim(\mathcal{L}(P_{H_1}, P_{\alpha}))$$

Viceversa

$$\pi_Q(\ell) = \mathbb{P}\left(\underbrace{\text{Span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}}_{W_{\ell} \subset V}\right) \subset \mathbb{P}^3$$

$$\dim(\text{Ann}_{V^*}(W_{\ell})) = 2 \quad \ell \begin{cases} \text{Ann}_{V^*}(W_{\ell}) = \text{Span}\{H_1, \alpha\} \\ W_{\ell} = \text{Ann}_V(\text{Span}\{H_1, \alpha\}) \end{cases}$$